行列式　determinant

1　行列式

行列式 determinant

n 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して、その n^2 個の成分 a_{ij} から作られる

$$\sum_{p,q,\cdots,r=1}^{n} \epsilon_{pq\ldots r}\ a_{1p}\ a_{2q}\ \ldots\ldots\ a_{nr}$$

なる式のことを、行列 A の行列式という。（ ただし 自然数 $p,\ q,\ \cdots,\ r$ の個数は n ）

ここで

$\epsilon_{pq\cdots r} = 1,$　　　（ $p, q, \cdots, r$ が偶順列のとき ）

$\epsilon_{pq\cdots r} = -1,$　　（ $p, q, \cdots, r$ が奇順列のとき ）

$\epsilon_{pq\cdots r} = 0,$　　　（ $p, q, \cdots, r$ の中に同じ数があるとき ）

［例］

$\epsilon_{12} = 1,\quad \epsilon_{21} = -1,\quad \epsilon_{11} = 0,\quad \epsilon_{22} = 0$

$\epsilon_{123} = 1,\quad \epsilon_{132} = -1,\quad \epsilon_{213} = -1,\quad \epsilon_{321} = -1,\quad \epsilon_{231} = 1,\quad \epsilon_{312} = 1,\quad \epsilon_{112} = 0,\quad \epsilon_{122} = 0,\quad \cdots$ など。

行列式の記法

n 次の正方行列の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

のように記す。

n 次の正方行列から作られる行列式のことを、n 次の行列式という。

(a)　1 次の行列式

$$|a_{11}| = a_{11}$$

(b)　2 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{p,q=1}^{2} \epsilon_{pq}\ a_{\mathbf{1}p}\ a_{\mathbf{2}q}$$

$$= \epsilon_{12}\ a_{\mathbf{11}}a_{\mathbf{22}} + \epsilon_{21}\ a_{\mathbf{12}}a_{\mathbf{21}}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(c)　3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p,q,r=1}^{3} \epsilon_{pqr}\ a_{\mathbf{1}p}\ a_{\mathbf{2}q}\ a_{\mathbf{3}r}$$

$$= \epsilon_{123}\ a_{\mathbf{1}\mathbf{1}}a_{\mathbf{2}\mathbf{2}}a_{\mathbf{3}\mathbf{3}} + \epsilon_{132}\ a_{\mathbf{1}\mathbf{1}}a_{\mathbf{2}\mathbf{3}}a_{\mathbf{3}\mathbf{2}} + \epsilon_{213}\ a_{\mathbf{1}\mathbf{2}}a_{\mathbf{2}\mathbf{1}}a_{\mathbf{3}\mathbf{3}} + \epsilon_{231}\ a_{\mathbf{1}\mathbf{2}}a_{\mathbf{2}\mathbf{3}}a_{\mathbf{3}\mathbf{1}} + \epsilon_{312}\ a_{\mathbf{1}\mathbf{3}}a_{\mathbf{2}\mathbf{1}}a_{\mathbf{3}\mathbf{2}} + \epsilon_{321}\ a_{\mathbf{1}\mathbf{3}}a_{\mathbf{2}\mathbf{2}}a_{\mathbf{3}\mathbf{1}}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

上記の例で右辺の式を求めることを行列式の展開といい、右辺の式のことを展開式という。

［例］2 次の行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \times 4 - 8 \times (-2) = 36$$

［例］3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 5 \times 4 \times 9 - 5 \times 1 \times 6 - 8 \times (-2) \times 9 + 8 \times 1 \times 7 + 3 \times (-2) \times 6 - 3 \times 4 \times 7 = 230$$

(d)　4 次の行列式

4 次の行列式は、3 次の行列式の和で表してから展開の計算をした方が簡便である。
ここでは 第 1 行の要素を因子として展開する方法を示す。
展開に際しては、各項に $(-1)^{i+j}$ がかかる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{1+4}a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33}a_{44} + a_{32}a_{43}a_{24} + a_{23}a_{34}a_{42} - a_{24}a_{33}a_{42} - a_{23}a_{32}a_{44} - a_{34}a_{43}a_{22}\right)$$
$$-a_{12}\left(a_{21}a_{33}a_{44} + a_{31}a_{43}a_{24} + a_{23}a_{34}a_{41} - a_{24}a_{33}a_{41} - a_{23}a_{31}a_{44} - a_{34}a_{43}a_{21}\right)$$
$$+a_{13}\left(a_{21}a_{32}a_{44} + a_{31}a_{42}a_{24} + a_{22}a_{34}a_{41} - a_{24}a_{32}a_{41} - a_{22}a_{31}a_{44} - a_{34}a_{42}a_{21}\right)$$
$$-a_{14}\left(a_{21}a_{32}a_{43} + a_{31}a_{42}a_{23} + a_{22}a_{33}a_{41} - a_{23}a_{32}a_{41} - a_{22}a_{31}a_{43} - a_{33}a_{42}a_{21}\right)$$

2　行列式を用いた連立1次方程式の解法

2元連立1次方程式

未知数を x_1, x_2 とする。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

上記の連立方程式を、行列を用いて表すと次のように記せる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

このとき解は行列式を用いて次のように表せる。

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} , \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} , \qquad \text{ただし} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

［例］行列式を用いて、次の連立方程式を解く。

$$2x_1 + 6x_2 = -8$$
$$7x_1 + 10x_2 = 5$$

（解法）

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -8 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{(-8) \times 10 - 6 \times 5}{2 \times 10 - 6 \times 7} = \frac{-110}{-22} = 5$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{2 \times 5 - (-8) \times 7}{2 \times 10 - 6 \times 7} = \frac{66}{-22} = -3$$

3元連立1次方程式

未知数を x_1, x_2, x_3 とする。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

上記の連立方程式を、行列を用いて表すと次のように記せる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

このとき解は行列式を用いて次のように表せる。

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} , \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

ただし　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

［例］行列式を用いて、次の連立方程式を解く。

$$\begin{aligned} &2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = -1 \\ &7x_1 + 10x_2 + 6x_3 = 11 \\ &9x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 18 \end{aligned}$$

（解法）

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 11 & 10 & 6 \\ 18 & 8 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 7 & 10 & 6 \\ 9 & 8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{280}{56} = 5$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 7 & 11 & 6 \\ 9 & 18 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 7 & 10 & 6 \\ 9 & 8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-168}{56} = -3$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 7 & 10 & 11 \\ 9 & 8 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 7 & 10 & 6 \\ 9 & 8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{56}{56} = 1$$