微分　differential

1　関数

関数 function とは、一般的には実数や複素数の集合 X から実数や複素数の集合 Y への写像のことである。
複素数とは実数の他に虚数を含む数のことをいう。本稿では、集合 X と Y がともに実数集合のときの写像を関数と呼ぶ。このとき集合 X のことを関数の定義域、集合 Y のことを値域という。実数の集合 X の要素を x, 実数の集合 Y の要素を y と記すとき、一般に y が x の関数で与えられることを、記号的に $y = f(x)$ のように表記する。ここで x を独立変数、y を従属変数という。なお虚数を含むような集合間における写像すなわち複素関数については、本稿では論述しない。

［例］

$y = 1$　：　定数関数
$y = x$　：　1 次関数
$y = x^2$　：　2 次関数
$y = x^3$　：　3 次関数

$y = \dfrac{1}{x}$　：　有理関数

$y = \dfrac{1}{x^2}$　：　有理関数

$y = \sqrt{x}$　：　無理関数

$y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$　：　無理関数

$y = \sin x$　：　三角関数（正弦）
$y = \cos x$　：　三角関数（余弦）
$y = \tan x$　：　三角関数（正接）
$y = 10^x$　：　指数関数
$y = e^x$　：　指数関数（ただし e はネピア数）
$y = \log_{10} x$　：　対数関数（常用対数）
$y = \log_e x$　：　対数関数（自然対数）

関数 $y = f(x)$ において、x と y を入れ換えると $x = f(y)$ を得る。このとき $y = f^{-1}(x)$ を逆関数という。

［例］

$y = f(x)$	$x = f(y)$	$y = f^{-1}(x)$
$y = 2x$	$x = 2y$	$y = \frac{1}{2}x$
$y = x^2$	$x = y^2$	$y = \sqrt{x}$
$y = 5^x$	$x = 5^y$	$y = \log_5 x$
$y = e^x$	$x = e^y$	$y = \log_e x$
$y = \sin x$	$x = \sin y$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x$	$x = \cos y$	$y = \arccos x$
$y = \tan x$	$x = \tan y$	$y = \arctan x$

［注］自然対数の底 e はネピア数とも呼ばれ、その値は次式のような無限級数の和で与えられるが、これは無理数に属する。

$$e \;=\; 1 + \frac{1}{1\times 1} + \frac{1}{2\times 1} + \frac{1}{3\times 2\times 1} + \frac{1}{4\times 3\times 2\times 1} + \frac{1}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} + \cdots\cdots \;=\; 2.71828\cdots$$

［注］$y = \sqrt{x}$ については、独立変数 x の変域が $x \geq 0$ に限られる。

$y = \arcsin x$ と $y = \arccos x$ については、独立変数 x の変域が $-1 < x < 1$ に限られる。
$y = \log_5 x$ と $y = \log_e x$ については、独立変数 x の変域が $x > 0$ に限られる。

［注］逆三角関数の呼称
arcsin ： 「アーク サイン」
arccos ： 「アーク コサイン」
arctan ： 「アーク タンジェント」

［注］$\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$ については、それぞれ $\sin^{-1} x$，$\cos^{-1} x$，$\tan^{-1} x$ のように記すことがある。
$\log_e x$ については $\ln x$ のように記すことがある。

補遺

集合とは、考える範囲内の対象で、「個々のもの」の全体のことをいう。ここで「個々のもの」を要素という。
一般に集合を表す記号は、$A, B, \cdots, X, Y$ などの大文字を用い、それら集合の要素を記号的に表すときは、$a, b, \cdots, x, y$ などの小文字を用いることが多い。
身近な例として、集合 A を $A = \{$ 中村, 田中, 鈴木, 川村, 野村 $\}$ とするとき、この集合 A は日本人の名前の集合であり、その要素 a は 5 個のそれぞれの名前である。
また集合 B を $B = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ とするとき、B は -2 から 3 までの整数の集合を表し、その要素 b は -2 から 3 までの 6 個のそれぞれの整数である。
一般に二つの集合 X と Y があるとき、X の各要素 x に Y の一つの要素 y が対応させせられているとき、この対応のことを集合 X から Y への写像という。
身近な例として、学生番号の集合を $X = \{\ 1,\ 2,\ 3\ \}$ とし、名前の集合を $Y = \{$ 足立, 石村, 江田 $\}$ があるとき、X の各要素 x に対して Y の一つの要素 y が、名前を五十音順に並べる写像によって対応づけることができる。
また $X = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \}$ とし、$Y = \{\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25\ \}$ があるとき、X の各要素 x に対して Y の一つの要素 y が写像 $y = x^2$ によって対応づけられている。

2　導関数

関数 $y = f(x)$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ は、次式によって定義される。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ただし Δx は、独立変数 x の増分であり、$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ は、従属変数 y の増分である。
関数 $y = f(x)$ から導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める演算のことを微分という。
関数が定まった導関数をもつとき、その関数は微分可能であるという。なお関数はすべて微分可能であるとは限らない。
関数 $y = f(x)$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ や $\frac{d}{dx}f(x)$ を それぞれ y' や $f'(x)$ のように記すこともある。
関数 $y = f(x)$ において、独立変数 x の微小変化分を dx、従属変数 y の微小変化分を dy とすると、

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx = f'(x)\,dx$$

の関係が成り立つ。

(a) 1 次関数 $y = x$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \qquad \text{すなわち} \quad dy = dx$$

(b) 2 次関数 $y = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x, \qquad \text{すなわち} \quad dy = 2x\,dx$$

(c) 3 次関数 $y = x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right] = 3x^2, \qquad \text{すなわち} \quad dy = 3x^2\,dx$$

(d) 有理関数 $y = x^{-1}$ (ただし $x \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{-1} - x^{-1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x - (x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = \frac{-1}{x^2} = -x^{-2}, \qquad \text{すなわち} \quad dy = -x^{-2}\,dx$$

(e) 有理関数 $y = x^{-2}$ (ただし $x \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{-2} - x^{-2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2}\right]\frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 - (x+\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 - x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x\Delta x - (\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x - \Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$$

$$= \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} = -2x^{-3}, \qquad \text{すなわち} \quad dy = -2x^{-3}\,dx$$

(f) 無理関数 $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = x^{0.5}$ (ただし $x > 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \qquad \text{すなわち} \quad dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

3 微分公式

(a) 定数 c の関数 $y = c$ の微分について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}c = 0$$

(b) 関数 $y = x^n$ の微分について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \text{(ただし } n \text{ は実数)}$$

(c) 定数 c と関数 $f(x)$ の積 $cf(x)$ の微分について

$$\frac{d}{dx}\left[cf(x)\right] = c\,\frac{d}{dx}f(x) = cf'(x)$$

(d) 二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ があるとき

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\ g(x)\right] = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\ g(x) - f(x)\ g'(x)}{[g(x)]^2}$$

［例］

$$\frac{d}{dx}(5x^2) = 5\frac{d}{dx}x^2 = 5 \times 2x^{2-1} = 10x$$

$$\frac{d}{dx}(x^3+x^2) \quad = \quad \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}x^2 \ = \ 3x^2+2x$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(x^4+x^3)(x^2-x)] \quad &= \quad (x^4+x^3)'\ (x^2-x) + (x^4+x^3)\ (x^2-x)' \ = \ (4x^3+3x^2)(x^2-x)+(x^4+x^3)(2x-1) \\ &= \quad 2x^3(3x^2-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{(x^4+x^3)}{(x^2-x)}\right] \quad &= \quad \frac{(x^4+x^3)'\ (x^2-x)-(x^4+x^3)\ (x^2-x)'}{(x^2-x)^2} \ = \ \frac{(4x^3+3x^2)\ (x^2-x)-(x^4+x^3)\ (2x-1)}{(x^2-x)^2} \\ &= \quad \frac{2x^3(x^2-x-1)}{(x^2-x)^2}\end{aligned}$$

4 合成関数の微分公式

$y=f(g(x))$ のとき $\frac{dy}{dx}$ を求めるには、$t=g(x)$ とおいて

$$\frac{dy}{dx} \ = \ \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \ = \ \left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\left[\frac{d}{dx}g(x)\right] \quad \text{として計算する。}$$

［例］

$$\frac{d}{dx}(x^2-3x+8)^5 \quad = \quad 5(x^2-3x+8)^{5-1}\ \frac{d}{dx}(x^2-3x+8) \ = \ 5(x^2-3x+8)^4\ (2x-3)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(x^3-5)^6+9]^8 \quad &= \quad 8\left[(x^3-5)^6+9\right]^{8-1}\ \frac{d}{dx}\left[(x^3-5)^6+9\right] \ = \ 8\left[(x^3-5)^6+9\right]^7\ 6(x^3-5)^{6-1}\ \frac{d}{dx}(x^3-5) \\ &= \quad 8\left[(x^3-5)^6+9\right]^7\ 6(x^3-5)^5\ 3x^2 \ = \ 144x^2(x^3-5)^5\left[(x^3-5)^6+9\right]^7\end{aligned}$$

5 三角関数の導関数

三角関数の導関数を求める。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin x \quad &= \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x} \\ &= \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}\sin x + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cos x\end{aligned}$$

ここで $\displaystyle \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x} \ = \ 0, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \ = \ 1,$ なので

$$= \quad \cos x$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cos x \quad &= \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x-\cos x}{\Delta x} \\ &= \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}\cos x - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\sin x \ = \ -\sin x\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\tan x \quad = \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \quad = \quad \frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\ (\cos x)'}{(\cos x)^2} \quad = \quad \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2} \quad = \quad \frac{1}{\cos^2 x} \quad = \quad \sec^2 x$$

6　三角関数の微分公式

三角関数の微分公式を次に示す。

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

［例］

$$\frac{d}{dx}\sin(2x+5) = \cos(2x+5)\,\frac{d}{dx}(2x+5) = 2\cos(2x+5)$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x^3+1) = -\sin(x^3+1)\,\frac{d}{dx}(x^3+1) = -3x^2\sin(x^3+1)$$

$$\frac{d}{dx}5\tan(x-8) = 5\sec(x-8)\,\frac{d}{dx}(x-8) = 5\sec^2(x-8)$$

7　対数関数の導関数

対数関数の導関数を求める。

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}, \qquad (\text{ただし}\ \ a>0\ \ \text{かつ}\ \ x>0)$$

ここで　$\log_a(x+\Delta x)-\log_a x = \log_a\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)$　なので

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

ここで　$\dfrac{x}{\Delta x} = t$　とおくと　$\Delta x \to 0$　のとき　$t\to\infty$　より

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{x}\,t\log_a\left(1+\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{x}\ \log_a\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{x}\ \log_a\ \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

ここで　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$　の値は、$2.7182\cdots$　に収束し、これは無理数の一種であることが知られているので

$e = \displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = 2.7182\cdots$　とおくと

$$= \frac{1}{x}\log_a e$$

よって　$\log_a x$　を微分すると　$x^{-1}\log_a e$　となる。

［注］対数 $\log_a x$ において、$a=e$ のとき、$\log_e x$ を自然対数といい、$\ln x$ または $\log x$ のように記すことがある。

［注］自然対数の導関数

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x} = x^{-1}, \qquad (\text{ただし}\ \ x>0)$$

［注］$e = 2.7182\cdots$ を「自然対数の底」または「Napier(ネピア) 数」という。

8　指数関数の導関数

指数関数の導関数を求める。

指数関数　$y = a^x \quad (a > 0)$　において、両辺の自然対数をとると　$\log_e y \ = \ \log_e a^x$　すなわち　$\log_e y \ = \ x \log_e a$
両辺を x について微分すると　$\dfrac{d}{dx} \log_e y \ = \ \dfrac{d}{dx} x \log_e a$　より　$\left(\dfrac{1}{y}\right) \dfrac{dy}{dx} \ = \ \log_e a$

$$\frac{dy}{dx} \ = \ y \log_e a \ = \ a^x \log_e a$$

［注］e^x の導関数

$$\frac{d}{dx} e^x \ = \ e^x \log_e e \ = \ e^x$$

9　対数関数と指数関数の微分公式

対数関数と指数関数の微分公式を次に示す。

$$\frac{d}{dx} \log_a x \ = \ \frac{1}{x} \log_a e, \qquad (\text{ただし} \quad a > 0 \ \ \text{かつ} \ \ x > 0)$$

$$\frac{d}{dx} \log_e x \ = \ \frac{d}{dx} \ln x \ = \ \frac{1}{x}, \qquad (\text{ただし} \quad x > 0)$$

$$\frac{d}{dx} a^x \ = \ a^x \log_e a, \qquad (\text{ただし} \quad a > 0)$$

$$\frac{d}{dx} e^x \ = \ e^x$$

［注］e^x を $\exp(x)$ のように記すこともある。

［例］

$$\frac{d}{dx} \log_a (x^4 + x^2 + 1) \ = \ \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} (\log_a e) \ \frac{d}{dx} (x^4 + x^2 + 1) \ = \ \frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1} \log_a e$$

$$\frac{d}{dx} \log_e (2x^2 - 3x + 5) \ = \ \frac{1}{2x^2 - 3x + 5} \ \frac{d}{dx} (2x^2 - 3x + 5) \ = \ \frac{4x - 3}{2x^2 - 3x + 5}$$

$$\frac{d}{dx} a^{x^2} \ = \ a^{x^2} (\log_e a) \ \frac{d}{dx} x^2 \ = \ 2x a^{x^2} \log_e a$$

$$\frac{d}{dx} e^{x^2} \ = \ e^{x^2} \ \frac{d}{dx} x^2 \ = \ 2x e^{x^2}$$

10　逆三角関数の導関数

三角関数　$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x$ を、それぞれ x について表すとき、

$$x = \arcsin y, \qquad x = \arccos y, \qquad x = \arctan y$$

のように記す。ここで x と y を入れ替えて、三角関数の逆関数すなわち逆三角関数を次のように定義する。

$$y = \arcsin x \quad \left(\text{ただし} \quad -1 \leq x \leq 1 \ \ \text{かつ} \ \ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y = \arccos x \quad (\text{ただし} \quad -1 \leq x \leq 1 \ \ \text{かつ} \ \ 0 \leq y \leq \pi \ )$$

$$y = \arctan x \quad \left(ただし\ \ x\ は実数の全範囲\ \ かつ\ \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

［注］逆三角関数を次のように表記することもある。

$$y = \sin^{-1} x, \qquad y = \cos^{-1} x, \qquad y = \tan^{-1} x$$

(a) $y = \arcsin x$ の導関数

$x = \sin y$　の両辺を x について微分すると　$\dfrac{d}{dx}x = \dfrac{d}{dx}\sin y$　となるので　$1 = \cos y\ \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos y}$ ，　ここで　$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$　より　$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

そこで　$\sin y = x$　であったから　$\cos^2 y = 1 - x^2$　すなわち　$\cos y = \sqrt{1-x^2}$　となるので

よって　$\dfrac{dy}{dx} \ = \ \dfrac{d}{dx}\arcsin x \ = \ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $y = \arccos x$ の導関数

$x = \cos y$　の両辺を x について微分すると　$\dfrac{d}{dx}x = \dfrac{d}{dx}\cos y$　となるので　$1 = -\sin y\ \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{\sin y}$ ，　ここで　$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$　より　$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$

そこで　$\cos y = x$　であったから　$\sin^2 y = 1 - x^2$　すなわち　$\sin y = \sqrt{1-x^2}$　となるので

よって　$\dfrac{dy}{dx} \ = \ \dfrac{d}{dx}\arccos x \ = \ \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $y = \arctan x$ の導関数

$x = \tan y$　の両辺を x について微分すると　$\dfrac{d}{dx}x = \dfrac{d}{dx}\tan y$　となるので　$1 = \sec^2 y\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 y}\ \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx} = \cos^2\ y$　ここで　$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$　より　$\dfrac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 y}$　すなわち　$\tan^2 y + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 y}$

$\cos^2 y = \dfrac{1}{1+\tan^2 y}$　そこで　$\tan y = x$　であったから　$\cos^2 y = \dfrac{1}{1+x^2}$　となるので

よって　$\dfrac{dy}{dx} \ = \ \dfrac{d}{dx}\arctan x \ = \ \dfrac{1}{1+x^2}$

11　逆三角関数の微分公式

逆三角関数の微分公式を次に示す。

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (ただし\quad -1 < x < 1)$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (ただし\quad -1 < x < 1)$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

［例］

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arcsin}^3 x \ = \ 3\mathrm{arcsin}^{3-1} x\ \frac{d}{dx}\arcsin x \ = \ \frac{3\mathrm{arcsin}^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x^3) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\frac{d}{dx}x^3 = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

$$\frac{d}{dx}\mathrm{arccos}^3 x = 3\mathrm{arccos}^{3-1} x\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-3\mathrm{arccos}^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos(x^3) = \frac{-1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\frac{d}{dx}x^3 = \frac{-3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan(2x+5) = \frac{1}{1+(2x+5)^2}\frac{d}{dx}(2x+5) = \frac{2}{1+(2x+5)^2}$$

12　双曲線関数の導関数

次の式で定義される関数 $\sinh x$，$\cosh x$，　$\tanh x$ を双曲線関数という。

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

双曲線関数には次のような関係が成り立つ。

$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$$
$$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta$$
$$\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$$

［注］双曲線関数の呼称

sinh：　「ハイパボリック サイン」

cosh：　「ハイパボリック コサイン」

tanh：　「ハイパボリック タンジェント」

(a)　$\sinh x$ の導関数

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \cosh x$$

(b)　$\cosh x$ の導関数

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \sinh x$$

(c)　$\tanh x$ の導関数

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tanh x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \mathrm{sech}^2 x\end{aligned}$$

13　双曲線関数の微分公式

双曲線関数の微分公式を次に示す。

$$\frac{d}{dx}\sinh x \;=\; \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x \;=\; \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x \;=\; \frac{1}{\cosh^2 x} \;=\; \mathrm{sech}^2 x$$

［例］

$$\frac{d}{dx}\sinh^3 x \;=\; 3\sinh^{3-1} x\,\frac{d}{dx}\sinh x \;=\; 3\sin^2 x\cosh x$$

$$\frac{d}{dx}\cosh(x^3) \;=\; \sinh(x^3)\,\frac{d}{dx}x^3 \;=\; 3x^2\sinh(x^3)$$

$$\frac{d}{dx}\tanh(2x+5) \;=\; \frac{1}{\cosh^2(2x+5)}\,\frac{d}{dx}(2x+5) \;=\; \frac{2}{\cosh^2(2x+5)} \;=\; 2\,\mathrm{sech}^2(2x+5)$$

14　高次導関数

関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を更に微分して得られる導関数 $f^{(2)}(x)$ のことを第 2 次導関数といい、次式によって定義される。

$$f^{(2)}(x) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

第 2 次導関数 $f^{(2)}(x)$ は次のようにも表記される。

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x), \qquad f''(x), \qquad \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad y''$$

一般に関数 $y = f(x)$ を n 回微分して得られる導関数のことを第 n 次導関数といい、次のように表記する。

$$f^{(n)}(x), \qquad \frac{d^n}{dx^n}f(x), \qquad \frac{d^ny}{dx^n}, \qquad y^{(n)}$$

［注］ $f^{(1)}(x)$ は第 1 次導関数を示し、 $f'(x)$ のことである。

［例］ $y = x^k$ の高次導関数　(ただし k は実数の定数)

$$y^{(1)} \;=\; kx^{k-1} \quad \text{より}$$

$$y^{(2)} \;=\; \frac{d^2y}{dx^2} \;=\; \frac{d^2}{dx^2}(x^k) \;=\; k(k-1)x^{k-2}$$

$$y^{(3)} \;=\; \frac{d^3y}{dx^3} \;=\; \frac{d^3}{dx^3}(x^k) \;=\; k(k-1)(k-2)x^{k-3}$$

$$y^{(4)} \;=\; \frac{d^4y}{dx^4} \;=\; \frac{d^4}{dx^4}(x^k) \;=\; k(k-1)(k-2)(k-3)x^{k-4}$$

$$y^{(5)} \;=\; \frac{d^5y}{dx^5} \;=\; \frac{d^5}{dx^5}(x^k) \;=\; k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)x^{k-5}$$

［例］ $y = \sin(kx)$ の高次導関数　(ただし k は実数の定数)

$$y^{(1)} \;=\; k\cos(kx) \quad \text{より}$$

$$y^{(2)} \;=\; \frac{d^2}{dx^2}\sin(kx) \;=\; -k^2\sin(kx)$$

$$y^{(3)} \;=\; \frac{d^3}{dx^3}\sin(kx) \;=\; -k^3\cos(kx)$$

$$y^{(4)} \;=\; \frac{d^4}{dx^4}\sin(kx) \;=\; k^4\sin(kx)$$

$$y^{(5)} \;=\; \frac{d^5}{dx^5}\sin(kx) \;=\; k^5\cos(kx)$$

［例］ $y = \log_a x$ の高次導関数　(ただし $a > 0$　かつ　$x > 0$)

$y^{(1)} \;=\; x^{-1}\log_a e$　より

$$y^{(2)} \;=\; \frac{d^2}{dx^2}\log_a x \;=\; -x^{-2}\log_a e$$

$$y^{(3)} \;=\; \frac{d^3}{dx^3}\log_a x \;=\; 2x^{-3}\log_a e$$

$$y^{(4)} \;=\; \frac{d^4}{dx^4}\log_a x \;=\; -6x^{-4}\log_a e$$

$$y^{(5)} \;=\; \frac{d^5}{dx^5}\log_a x \;=\; 24x^{-5}\log_a e$$

［例］ $y = a^x$ の高次導関数　(ただし $a > 0$)

$y^{(1)} \;=\; a^x\log_e a$　より

$$y^{(2)} \;=\; \frac{d^2}{dx^2}a^x \;=\; a^x(\log_e a)^2$$

$$y^{(3)} \;=\; \frac{d^3}{dx^3}a^x \;=\; a^x(\log_e a)^3$$

$$y^{(4)} \;=\; \frac{d^4}{dx^4}a^x \;=\; a^x(\log_e a)^4$$

$$y^{(5)} \;=\; \frac{d^5}{dx^5}a^x \;=\; a^x(\log_e a)^5$$

［例］ $y = \log_e x$ の高次導関数　(ただし $x > 0$)

$y^{(1)} \;=\; x^{-1}$　より

$$y^{(2)} \;=\; \frac{d^2}{dx^2}\log_e x \;=\; -x^{-2}$$

$$y^{(3)} \;=\; \frac{d^3}{dx^3}\log_e x \;=\; 2x^{-3}$$

$$y^{(4)} \;=\; \frac{d^4}{dx^4}\log_e x \;=\; -6x^{-4}$$

$$y^{(5)} \;=\; \frac{d^5}{dx^5}\log_e x \;=\; 24x^{-5}$$

［例］ $y = e^{kx}$ の高次導関数　(ただし k は実数の定数)

$y^{(1)} \;=\; ke^{kx}$　より

$$y^{(2)} \;=\; \frac{d^2}{dx^2}e^{kx} \;=\; k^2e^{kx}$$

$$y^{(3)} \;=\; \frac{d^3}{dx^3}e^{kx} \;=\; k^3e^{kx}$$

$$y^{(4)} = \frac{d^4}{dx^4}e^{kx} = k^4 e^{kx}$$

$$y^{(5)} = \frac{d^5}{dx^5}e^{kx} = k^5 e^{kx}$$

一般に n 回微分可能な関数 $f(x),\ g(x)$ があるとき、その高次導関数について次式が成り立つ。

$$[f(x) \pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$$

$$[cf(x)]^{(n)} = cf^{(n)}(x), \qquad \text{(ただし } c \text{ は定数)}$$

15 多項式で表される関数の係数

一般に多項式関数 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ の各係数 a_i は、$f(x)$ を微分して得られる。

(a) 1 次多項式関数 $f(x) = a_0 + a_1x$ の係数を求める。

$f(0) = a_0$
$f^{(1)}(x) = a_1$ より $f^{(1)}(0) = a_1$ すなわち $a_1 = f^{(1)}(0)$
よって $f(x) = a_0 + a_1x = f(0) + f^{(1)}(0)\, x$

(b) 2 次多項式関数 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ の各係数を求める。

$f(0) = a_0$
$f^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2x$ より $f^{(1)}(0) = a_1$ すなわち $a_1 = f^{(1)}(0)$
$f^{(2)}(x) = 2a_2$ より $f^{(2)}(0) = 2a_2$ すなわち $a_2 = \dfrac{f^{(2)}(0)}{2}$
よって $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = f(0) + f^{(1)}(0)\, x + \dfrac{f^{(2)}(0)}{2}\, x^2$

(c) 3 次多項式関数 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ の各係数を求める。

$f(0) = a_0$
$f^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$ より $f^{(1)}(0) = a_1$ すなわち $a_1 = f^{(1)}(0)$
$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 3 \times 2a_3x$ より $f^{(2)}(0) = 2a_2$ すなわち $a_2 = \dfrac{f^{(2)}(0)}{2}$
$f^{(3)}(x) = 3 \times 2a_3$ より $f^{(3)}(0) = 3 \times 2a_3$ すなわち $a_3 = \dfrac{f^{(3)}(0)}{3 \times 2}$
よって $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = f(0) + f^{(1)}(0)\, x + \dfrac{f^{(2)}(0)}{2}\, x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3 \times 2}\, x^3$

(d) 4 次多項式関数 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$

$f(0) = a_0$
$f^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$ より $a_1 = f^{(1)}(0)$
$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 3 \times 2a_3x + 4 \times 3a_4x^2$ より $a_2 = \dfrac{f^{(2)}(0)}{2}$
$f^{(3)}(x) = 3 \times 2a_3 + 4 \times 3 \times 2a_4x$ より $a_3 = \dfrac{f^{(3)}(0)}{3 \times 2}$
$f^{(4)}(x) = 4 \times 3 \times 2a_4$ より $a_4 = \dfrac{f^{(4)}(0)}{4 \times 3 \times 2}$
よって $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = f(0) + f^{(1)}(0)\, x + \dfrac{f^{(2)}(0)}{2}\, x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3 \times 2}\, x^3 + \dfrac{f^{(4)}(0)}{4 \times 3 \times 2}\, x^4$

(e) n 次多項式で表される関数 (ただし n は自然数)

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$

$$= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}\ x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\ x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\ x^3 + \ \cdots\ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ x^n$$

ただし！は階乗 (factorial ファクトリアル) を示す記号である。

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \times 1 \\ 2! &= 2 \times 1 \\ 3! &= 3 \times 2 \times 1 \\ \cdots\cdots & \quad \cdots\cdots \\ n! &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ \cdots\cdots\ \times 3 \times 2 \times 1 \end{aligned}$$

［注］ $0! = 1$

16　関数の級数展開

独立変数 x のある領域内で無限回微分可能な関数 $f(x)$ が、条件 $|f^{(n)}(x)| \leq M$ (ただし M はある定数) を満たすならば、$f(x)$ はこの x の領域内で次のような多項式関数でもって表すことが出来る。

$$f(x) \ = \ f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}\ x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\ x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\ x^3 + \ \cdots\ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ x^n + \cdots\cdots$$

［例］ 三角関数 $f(x) = \sin x$ の展開

$f(0) = \sin 0 = 0$
$f^{(1)}(0) = \cos 0 = 1$
$f^{(2)}(0) = -\sin 0 = 0$
$f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1$
$f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$
$f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1$
よって

$$\begin{aligned} f(x) \ = \ \sin x \ &= \ \sin 0 + \frac{(\cos 0)}{1!}\ x + \frac{(-\sin 0)}{2!}\ x^2 + \frac{(-\cos 0)}{3!}\ x^3 + \frac{(\sin 0)}{4!}\ x^4 + \frac{(\cos 0)}{5!}\ x^5 + \cdots\cdots \\ &= \ \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots \\ &= \ x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\cdots \end{aligned}$$

［例］ 指数関数 $f(x) = e^x$ の展開

$f(0) = e^0 = 1$
$f^{(1)}(0) = e^0 = 1$
$f^{(2)}(0) = e^0 = 1$
$f^{(3)}(0) = e^0 = 1$
$f^{(4)}(0) = e^0 = 1$
$f^{(5)}(0) = e^0 = 1$
よって

$$\begin{aligned} f(x) \ = \ e^x \ &= \ e^0 + \frac{e^0}{1!}\ x + \frac{e^0}{2!}\ x^2 + \frac{e^0}{3!}\ x^3 + \frac{e^0}{4!}\ x^4 + \frac{e^0}{5!}\ x^5 + \cdots\cdots \\ &= \ 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots \\ &= \ 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots\cdots \end{aligned}$$

17　偏微分

n 個 $(n \geq 2)$ の独立変数をもつ関数　$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$　すなわち多変数関数については、次式で表されるような偏微分が定義される。

(a) 二変数関数　$y = f(x_1,\ x_2)$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1,\ x_2) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1,\ x_2) - f(x_1,\ x_2)}{\Delta x_1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1,\ x_2) = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x_1,\ x_2 + \Delta x_2) - f(x_1,\ x_2)}{\Delta x_2}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2$$

(b) 三変数関数　$y = f(x_1,\ x_2,\ x_3)$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1,\ x_2,\ x_3) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1,\ x_2,\ x_3) - f(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\Delta x_1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1,\ x_2,\ x_3) = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(x_1,\ x_2 + \Delta x_2,\ x_3) - f(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\Delta x_2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1,\ x_2,\ x_3) = \lim_{\Delta x_3 \to 0} \frac{f(x_1,\ x_2,\ x_3 + \Delta x_3) - f(x_1,\ x_2,\ x_3)}{\Delta x_3}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial y}{\partial x_3} dx_3$$

［例］　$y = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(5x_1 + 6x_2 + 8x_3) = 5$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(5x_1 + 6x_2 + 8x_3) = 6$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}(5x_1 + 6x_2 + 8x_3) = 8$$

$$dy = 5\,dx_1 + 6\,dx_2 + 8\,dx_3$$

［例］　$z = (x + 3y)^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x + 3y)^2 = 2(x + 3y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x + 3y)^2 = 6(x + 3y)$$

$$dz = 2(x + 3y)\,dx + 6(x + 3y)\,dy$$

［例］　$z = \sin(x + 3y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sin(x + 3y) = \cos(x + 3y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sin(x + 3y) = 3\cos(x + 3y)$$

$$dz = \cos(x + 3y)\,dx + 3\cos(x + 3y)\,dy$$