微分方程式　differential equation

未知関数 y とその導関数 $y^{(1)},\ y^{(2)},\ \cdots,\ y^{(n)}$ (n は自然数) を含む方程式のことを微分方程式という。
最高次の導関数が $y^{(1)}$ であるような微分方程式は一階微分方程式、最高次の導関数が $y^{(2)}$ であるような微分方程式は二階微分方程式と呼ばれる。一般に最高次の導関数が $y^{(n)}$ の微分方程式は n 階微分方程式と呼ばれる。

［一階微分方程式の例］

$$2\frac{dy}{dx}+5y=3$$

$$\frac{dy}{dx}+x^2y=x$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-3y=x^2$$

［二階微分方程式の例］

$$3\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+8xy=1$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+5y=x$$

微分方程式を満たすような関数 $y=f(x)$ のことを、その微分方程式の解という。
一般に微分方程式の解は一つとは限らない。n 階微分方程式の解は n 個の任意定数を含むことが知られており、このような解は一般解と呼ばれる。これに対して任意定数を含まない解のことを特殊解という。
また微分方程式が解をもたない場合もある。解を求める操作を「微分方程式を解く」という。

1　変数分離形の一階微分方程式

次のように右辺が x の関数 $f(x)$ と y の関数 $g(y)$ に分離できる形の一階微分方程式を変数分離形という。

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

［例］

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=2y$$

$$\frac{dy}{dx}=2xy$$

$$y\frac{dy}{dx}-3x^2=2x$$

$$y^2\frac{dy}{dx}+y\frac{dy}{dx}-x=0$$

2　変数分離形の解法

変数分離形の解法を示す。

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)\quad より\quad \frac{1}{g(y)}dy=f(x)dx$$

解は　$\displaystyle\int \frac{1}{g(y)}\ dy = \int f(x)\ dx + c\ ,$　　(c は任意定数)

積分した結果の式について、可能であれば y について解く。
積分した結果の式が必ずしも y について解けるとは限らない。

［例］

$\dfrac{dy}{dx} = 3x$ の解を求める。

$dy = 3x\ dx$　より　$\displaystyle\int dy = \int 3x\ dx + c\ ,$　(c は任意定数)

解は　$y = \dfrac{3}{2}x^2 + c$

［例］

$\dfrac{dy}{dx} = 2y$ の解を求める。

$\dfrac{1}{y}dy = 2\ dx$　より　$\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = \int 2\ dx + c\ ,$　(c は任意定数)

$\log_e |y| = 2x + c$
$y = \pm e^{2x+c} = \pm e^{2x}e^c\ ,$　ここで $C = \pm e^c$ とおくと

解は　$y = Ce^{2x}\ ,$　(C は任意定数)

［例］

$\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ の解を求める。

$\dfrac{1}{y}dy = 2x\ dx$　より　$\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = \int 2x\ dx + c\ ,$　(c は任意定数)

$\log_e |y| = x^2 + c$
$y\ =\ \pm e^{x^2+c}\ =\ \pm e^{x^2}e^c\ ,$　ここで $C = \pm e^c$ とおくと

解は　$y\ =\ Ce^{x^2}\ ,$　(C は任意定数)

［例］

$y\dfrac{dy}{dx} - 3x^2 = 2x$ の解を求める。

$y\ dy = (3x^2 + 2x)\ dx$　より　$\displaystyle\int y\ dy = \int (3x^2 + 2x)\ dx + c\ ,$　(c は任意定数)

$\dfrac{1}{2}y^2 = x^3 + x^2 + c$

$y^2 = 2(x^3 + x^2) + 2c\ ,$　ここで $C = 2c$ とおくと

解は　$y = \pm\sqrt{2(x^3 + x^2) + C}\ ,$　(C は任意定数)

3　一階線形微分方程式

次のように y と y' について 1 次の 1 階微分方程式のことを一階線形微分方程式という。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\ y\ =\ Q(x)$$

ただし $P(x), Q(x)$ は既知の関数である。(線形でない微分方程式は非線形微分方程式と呼ばれる。)

4　一階線形微分方程式の解法

一階線形微分方程式の解法を示す。

$\dfrac{dy}{dx} + P(x)\ y \ = \ Q(x)$　の両辺に　$e^{\int P(x)dx}$　をかけて　$\dfrac{dy}{dx}e^{\int P(x)dx} + yP(x)\ e^{\int P(x)dx} \ = \ Q(x)\ e^{\int P(x)dx}$

ここで　左辺 $=\ \dfrac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right)$　と記せるので　$\dfrac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right) \ = \ Q(x)\ e^{\int P(x)dx}$

そこで両辺を x について積分すると　$ye^{\int P(x)dx} \ = \ \displaystyle\int Q(x)\ e^{\int P(x)dx}\ dx + C$,　(C は任意定数)

よって　$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\displaystyle\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$

5　一階線形微分方程式の解の公式

一階線形微分方程式の解の公式と応用例を示す。

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]\ ,\quad (\ C \text{ は任意定数})$$

［例］

$\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$　の解を求める。

$P(x) = 2$　並びに　$Q(x) = 3$　とおいて $y = e^{-\int 2dx}\left(\displaystyle\int 3e^{\int 2dx}dx + C\right) \ = \ e^{-2x}\left(\displaystyle\int 3e^{2x}dx + C\right)$

$\quad = e^{-2x}\left(\dfrac{3}{2}e^{2x} + C\right) \ = \ \dfrac{3}{2} + Ce^{-2x}$

解は　$y = \dfrac{3}{2} + Ce^{-2x}$,　(C は任意定数)

［例］

$\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3x$　の解を求める。

$P(x) = 2$　並びに　$Q(x) = 3x$　とおいて

$y = e^{-\int 2dx}\left(\displaystyle\int 3xe^{\int 2dx}dx + C\right) \ = \ e^{-2x}\left(\displaystyle\int 3xe^{2x}dx + C\right)$

$\quad = e^{-2x}\left(3x\cdot\dfrac{e^{2x}}{2} - \displaystyle\int 3\cdot\dfrac{e^{2x}}{2}dx + C\right)$,　(部分積分法を使用)

$\quad = e^{-2x}\left(\dfrac{3}{2}xe^{2x} - \dfrac{3}{2^2}e^{2x} + C\right) \ = \ \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2^2} + Ce^{-2x} \ = \ \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + Ce^{-2x}$

解は　$y = \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + Ce^{-2x}$,　(C は任意定数)

6　ベルヌーイ微分方程式

次の微分方程式はベルヌーイ微分方程式と呼ばれ、非線形微分方程式に属する。

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^n Q(x)$$

ただし $P(x), Q(x)$ は既知の関数であり、n は実数である。この微分方程式は n が 0 または 1 のときに限り、前述の一階線形微分方程式に帰着する。

7　ベルヌーイ微分方程式の解法

ベルヌーイ微分方程式の解法を示す。

$z = y^{1-n}$　とおくと　$y = zy^n$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}y^{1-n} = (1-n)y^{1-n-1}\,\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\,\frac{dy}{dx}$$　より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\,y^n\,\frac{dz}{dx}$$

そこでこれらをベルヌーイ微分方程式に代入すると

$$\frac{1}{1-n}\,y^n\,\frac{dz}{dx} + zy^nP(x) = y^nQ(x)$$　となるので　$$\frac{1}{1-n}\,\frac{dz}{dx} + zP(x) = Q(x)$$

すなわち　$$\frac{dz}{dx} + (1-n)zP(x) = (1-n)Q(x)$$

これは未知関数 z についての一階線形微分方程式に他ならない。
この一階線形微分方程式の解は

$$z = e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left[\int(1-n)Q(x)\;e^{\int(1-n)P(x)dx}dx + C\right]$$　であったから

ベルヌーイ微分方程式の解としては　$z = y^{1-n}$　を用いて

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} = \left\{e^{-(1-n)\int P(x)dx}\left[(1-n)\int Q(x)\;e^{(1-n)\int P(x)dx}dx + C\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

［例］

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 3y^2$$　の解を求める。

$P(x) = 5$　並びに　$Q(x) = 3$　とおいて

$$y = \left\{e^{-(1-2)\int 5dx}\left[(1-2)\int 3e^{(1-2)\int 5dx}dx + C\right]\right\}^{\frac{1}{1-2}} = \left\{e^{\int 5dx}\left[-\int 3e^{-\int 5dx}dx + C\right]\right\}^{-1}$$

$$= \left\{e^{5x}\left[-\int 3e^{-5x}dx + C\right]\right\}^{-1} = \left\{e^{5x}\left[\frac{3}{5}e^{-5x} + C\right]\right\}^{-1} = \left[\frac{3}{5} + Ce^{5x}\right]^{-1}$$

解は　$y = \left[\frac{3}{5} + Ce^{5x}\right]^{-1}$，　($C$ は任意定数)

［例］

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 3xy^2$$　の解を求める。

$$y=\left\{e^{-(1-2)\int 5dx}\left[(1-2)\int 3xe^{(1-2)\int 5dx}dx+C\right]\right\}^{\frac{1}{1-2}} = \left\{e^{\int 5dx}\left[-\int 3xe^{-\int 5dx}dx+C\right]\right\}^{-1}$$
$$=\left\{e^{5x}\left[-\int 3xe^{-5x}dx+C\right]\right\}^{-1} = \left\{-e^{5x}\left[\int 3xe^{-5x}dx-C\right]\right\}^{-1}$$
$$=\left\{-e^{5x}\left[3x\cdot\frac{e^{-5x}}{(-5)}-\int 3\cdot\frac{e^{-5x}}{(-5)}dx-C\right]\right\}^{-1},\quad \text{(部分積分法を使用)}$$
$$=\left\{-e^{5x}\left[-\frac{3}{5}xe^{-5x}-\frac{3}{(-5)^2}e^{-5x}-C\right]\right\}^{-1} = \left[\frac{3}{5}x+\frac{3}{5^2}+Ce^{5x}\right]^{-1} = \left[\frac{3}{5}\left(x+\frac{1}{5}\right)+Ce^{5x}\right]^{-1}$$

解は　$y=\left[\frac{3}{5}\left(x+\frac{1}{5}\right)+Ce^{5x}\right]^{-1}$　,　　(C は任意定数)

8　二階線形微分方程式

次の微分方程式は二階線形微分方程式と呼ばれる。

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+yR(x)=H(x)$$

ただし $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $H(x)$ は既知の関数である。特に既知関数 $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ がそれぞれ定数 a, b, c であるとき、

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=H(x)$$

を定数係数二階線形微分方程式という。この微分方程式の右辺 $H(x)=0$ である場合

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$$

を同次という。

9　同次の定数係数二階線形微分方程式の解法

同次の定数係数二階線形微分方程式の解法を示す。

$y=e^{tx}$　とおいて　$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$　に代入すると　$a\frac{d^2}{dx^2}e^{tx}+b\frac{d}{dx}e^{tx}+ce^{tx}=0$

$at^2e^{tx}+bte^{tx}+ce^{tx}=0$　すなわち　$(at^2+bt+c)e^{tx}=0$
したがって微分方程式の両辺が等しくなるためには、t の値が 2 次方程式
$at^2+bt+c=0$
を満たす必要がある。この 2 次方程式は特性方程式と呼ばれる。

(i) 特性方程式が、二つの異なる実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつとき、
　$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$,　　(ただし C_1 , C_2 は任意定数)

(ii) 特性方程式が、重解 α をもつとき、
　$y=(C_1+C_2x)e^{\alpha x}$

(iii) 特性方程式が、虚数解 $h\pm ni$ をもつとき、
　$y=e^{hx}(C_1\cos nx+C_2\sin nx)$

［例］

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ の解を求める。

$y = e^{tx}$ とおいて代入すると $\dfrac{d^2}{dx^2}e^{tx} - 3\dfrac{d}{dx}e^{tx} + 2e^{tx} = 0$ より $t^2e^{tx} - 3te^{tx} + 2e^{tx} = 0$

すなわち $(t^2 - 3t + 2)e^{tx} = 0$
このことから微分方程式の両辺が等しくなるためには、t の値が 2 次方程式
$t^2 - 3t + 2 = 0$
を満たす必要がある。

$t = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$

したがって $t = \alpha = \dfrac{3+1}{2} = 2,\quad t = \beta = \dfrac{3-1}{2} = 1$ となるので

解は $y = C_1e^{2x} + C_2e^x$, (ただし C_1 , C_2 は任意定数)

［例］

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ の解を求める。

$y = e^{tx}$ とおいて代入すると $\dfrac{d^2}{dx^2}e^{tx} - 4\dfrac{d}{dx}e^{tx} + 4e^{tx} = 0$ より $t^2e^{tx} - 4te^{tx} + 4e^{tx} = 0$

すなわち $(t^2 - 4t + 4)e^{tx} = 0$
このことから微分方程式の両辺が等しくなるためには、t の値が 2 次方程式
$t^2 - 4t + 4 = 0$
を満たす必要がある。

$t = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$

したがって $t = \alpha = 2$ となり、重解であるから

解は $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$, (ただし C_1 , C_2 は任意定数)

［例］

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$ の解を求める。

$y = e^{tx}$ とおいて代入すると $\dfrac{d^2}{dx^2}e^{tx} - 8\dfrac{d}{dx}e^{tx} + 25e^{tx} = 0$ より $t^2e^{tx} - 8te^{tx} + 25e^{tx} = 0$

すなわち $(t^2 - 8t + 25)e^{tx} = 0$

このことから微分方程式の両辺が等しくなるためには、t の値が 2 次方程式
$t^2 - 8t + 25 = 0$
を満たす必要がある。

$t = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-100}}{2} = 4 \pm 3i = h \pm ni$ となる。

したがって $h = 4,\quad n = 3$

解は $y = e^{4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$, (C_1 , C_2 は任意定数)

10　初期値問題

微分方程式の解は任意定数 C を含み、一般には解が無数に存在する。ところがこの解に対してある条件を付すと任意定数 C が定まり、微分方程式の解は一意に決まる。このような条件は初期条件と呼ばれ、この初期条件を満たす解を求める問題のことを初期値問題という。

例えば一階微分方程式の解が $y = f(x, C)$ であるとき、初期条件として $x = a$ のとき $y = b$ とすると、$b = f(a, C)$ より任意定数 C が定まる。ここで a, b は与えられた既知の定数である。

11　一階微分方程式の初期値問題

［例］

$\dfrac{dy}{dx} = 2x$　について、初期条件 $x = 2$ のとき $y = 5$ を満たす解を求める。

$y = \displaystyle\int 2x\ dx + c,$　　(ただし c は任意定数)

一般解は　$y = x^2 + c$

ここで初期条件　$x = 2$　のとき　$y = 5$　を代入して、$5 = 2^2 + c,$　したがって　$c = 5 - 2^2 = 1$　より

初期条件を満たす解は　$y = x^2 + 1$

［例］

$\dfrac{dy}{dx} = 3y$　について、初期条件 $x = 0$ のとき $y = 2$ を満たす解を求める。

$\dfrac{1}{y}\ dy = 3\ dx$　より　$\displaystyle\int \frac{1}{y}\ dy = \int 3\ dx + c$　すなわち　$\log_e |y| = 3x + c,$　(c は任意定数)

$y = e^{3x+c} = e^{3x}e^{c} = Ce^{3x},$　(ただし $C = e^{c}$)

一般解は　$y = Ce^{3x}$

ここで初期条件　$x = 0$　のとき　$y = 2$　を代入して、$2 = Ce^{0} = C,$　したがって　$C = 2$　より

初期条件を満たす解は　$y = 2e^{3x}$

［例］

$\dfrac{dy}{dx} = 2xy$　について、初期条件 $x = 0$ のとき $y = 5$ を満たす解を求める。

$\dfrac{1}{y}\ dy = \displaystyle\int 2x\ dx$　より　$\displaystyle\int \frac{1}{y}\ dy = \int 2x\ dx + c$　すなわち　$\log_e |y| = x^2 + c,$　(c は任意定数)

$y = e^{x^2+c} = e^{x^2}e^{c} = e^{x^2}C,$　(ただし $C = e^{c}$)

一般解は　$y = Ce^{x^2}$

ここで初期条件　$x = 0$　のとき　$y = 5$　を代入して、$5 = Ce^{0} = C,$　したがって　$C = 5$　より

初期条件を満たす解は　$y = 5e^{x^2}$

［例］

$\dfrac{dy}{dx} + 2y = 5$　について、初期条件 $x = 0$ のとき $y = 3$ を満たす解を求める。

$$y = e^{-\int 2dx}\left(\int 5e^{\int 2dx}dx + C\right) \ = \ e^{-2x}\left(\int 5e^{2x}dx + C\right) \ = \ e^{-2x}\left(\frac{5}{2}e^{2x} + C\right) \ = \ \frac{5}{2} + Ce^{-2x}$$

一般解は　$y = \dfrac{5}{2} + Ce^{-2x}$

ここで初期条件　$x = 0$　のとき　$y = 3$　を代入して、$3 = \dfrac{5}{2} + Ce^{0},$　したがって　$C = 3 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}$　より

初期条件を満たす解は　$y = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}e^{-2x}$

12　二階微分方程式の初期値問題

二階微分方程式の一般解は二つの任意定数 C_1, C_2 を含む。すなわち二階微分方程式の一般解が　$y = f(x, C_1, C_2)$ であるとき、初期条件として　$x = a$　のとき　$y = b_1$　かつ　$\frac{dy}{dx} = b_2$　とすると、

$$b_1 = f(a, C_1, C_2) \quad \text{かつ} \quad b_2 = \left[\frac{d}{dx}f(x, C_1, C_2)\right]_{x=a} \quad \text{より}$$

任意定数 C_1, C_2 が定まる。ここで a, b_1, b_2 は与えられた既知の定数である。

［例］

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6$　について、初期条件　$x = 0$　のとき　$y = 3$　かつ　$\dfrac{dy}{dx} = 10$　を満たす解を求める。

$\dfrac{dy}{dx} = \displaystyle\int 6\ dx + c_1 = 6x + c_1$　より　$\dfrac{dy}{dx} = 6x + c_1$

$y = \displaystyle\int (6x + c_1)\ dx = 3x^2 + c_1x + c_2$

一般解は　$y = 3x^2 + c_1x + c_2$,　(c_1, c_2 は任意定数)

初期条件　$x = 0$　のとき　$\dfrac{dy}{dx} = 10$　を　$\dfrac{dy}{dx} = 6x + c_1$　に代入すると　$10 = 6 \times 0 + c_1$

したがって　$c_1 = 10$　となるので　$y = 3x^2 + 10x + c_2$
さらに初期条件　$x = 0$　のとき　$y = 3$　を　$y = 3x^2 + 10x + c_2$　に代入すると　$3 = 3 \times 0^2 + 10 \times 0 + c_2$
したがって　$c_2 = 3$　となるので
初期条件を満たす解は　$y = 3x^2 + 10x + 3$

［例］

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -9y$　について、初期条件　$x = 0$　のとき　$y = 4$　かつ　$\dfrac{dy}{dx} = 6$　を満たす解を求める。

$y = e^{tx}$　とおいて代入すると　$\dfrac{d^2}{dx^2}e^{tx} = -9e^{tx}$　より　$t^2e^{tx} = -9e^{tx}$　すなわち　$(t^2 + 9)e^{tx} = 0$　となるので
特性方程式は　$t^2 + 9 = 0$
$t = \ \pm 3i \ = \ 0 \pm 3i$　(虚数解)
一般に特性方程式が、虚数解　$h \pm ni$　をもつときは、定数係数二階線形微分方程式の一般解の公式は、
$y \ = \ e^{hx}(C_1 \cos nx + C_2 \sin nx)$　であったから　$h = 0$,　$n = 3$　として
一般解は　$y \ = \ e^0(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \ = \ C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

そこで　$\dfrac{dy}{dx} \ = \ \dfrac{d}{dx}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \ = \ -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$

$x = 0$　のとき　$\dfrac{dy}{dx} = 6$　を　$\dfrac{dy}{dx} = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$　に代入して
$6 = -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0$　したがって　$C_2 = \dfrac{6}{3} = 2$　より
$y = C_1 \cos 3x + 2 \sin 3x$
さらに　$x = 0$　のとき　$y = 4$　を　$y = C_1 \cos 3x + 2 \sin 3x$　に代入して
$4 = C_1 \cos 0 + 2 \sin 0$　したがって　$C_1 = 4$　より
初期条件を満たす解は　$y = 4 \cos 3x + 2 \sin 3x$