微分方程式の応用　application of differential equation

1　重力による物体の落下速度

重力の作用により物体が落下するとき、物体の速度 v は時間 t を独立変数とする関数であって、次のような一階微分方程式に従っている。

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

ただし g は重力加速度と呼ばれる正の定数である。最初の時刻 $t = 0$ で速度が v_0 であるとすると、この微分方程式の解の中、初期条件として $t = 0$ のとき $v = v_0$ を満足するような関数 v を求める問題となる。

解法

$\dfrac{dv}{dt} = -g$　より　$dv = -gdt$

$$\int dv = -\int g\ dt + C\ ,\quad (C \text{ は任意定数})$$

一般解は　$v = -gt + C$

初期条件 $t = 0$ のとき $v = v_0$ を一般解 $v = -gt + C$ に代入して

$v_0 = -g \times 0 + C$　したがって $C = v_0$

よって　初期条件を満たす解は

$v = -gt + v_0$

このことから一定の重力のもとでは、物体の速度 v は時間 t の 1 次関数で記せる。

2　固体の熱膨張

固体が熱膨張するとき、固体の長さ l は温度 θ を独立変数とする関数であって、線膨張係数 α は次のような一階微分方程式によって定義される。

$$\alpha = \frac{1}{l_0}\left(\frac{dl}{d\theta}\right)$$

ただし l_0 は 0 °C のときの固体の長さであって定数である。線膨張係数 α が温度に依存せず、定数とみなせるときには容易に解が求められる。

解法

$\dfrac{dl}{d\theta} = \alpha l_0$　より　$dl = \alpha l_0\ d\theta$

$$\int dl = \int \alpha l_0\ d\theta + C\ ,\quad (C \text{ は任意定数})$$

一般解は　$l = \alpha l_0 \theta + C$

初期条件 $\theta = 0$ のとき $l = l_0$ を一般解 $l = \alpha l_0 \theta + C$ に代入して　$l_0 = \alpha l_0 \times 0 + c$　したがって $C = l_0$

よって　初期条件を満たす解は

$l = \alpha l_0 \theta + l_0\ =\ l_0(\alpha\theta + 1)$

このことから線膨張係数が温度に依存せず一定のとき、物体の長さは温度の 1 次関数で記せる。

なお線膨張係数は定数とは限らず温度に依存していることがあるが、このとき長さは温度の 1 次関数では記せない。

3 放射能強度

放射性物質の放射能強度 N は時間 t を独立変数とする関数であって、次のような一階微分方程式に従っている。
ここで放射能強度とは、1 秒間あたりに放射性崩壊する原子核の個数でもって定義する。

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

ただし λ は崩壊定数と呼ばれ、放射性物質の種類によって決まる。
最初の時刻 $t=0$ では放射能強度が N_0 であるとすると、この微分方程式の解の中、初期条件として $t=0$ のとき $N=N_0$ を満足する関数 N を求める問題となる。

解法

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad \text{より} \quad \frac{1}{N}\,dN = -\lambda\,dt$$

$$\int \frac{1}{N}\,dN = -\int \lambda\,dt + c\,, \qquad (c\ \text{は任意定数})$$

$$\log_e |N| = -\lambda t + c$$

$$N = e^{-\lambda t + c} = e^{-\lambda t}e^c = e^{-\lambda t}C\,, \qquad (\text{ただし}\ C = e^c)$$

一般解は　$N = Ce^{-\lambda t}$

初期条件　$t=0$　のとき　$N=N_0$　を一般解　$N=Ce^{-\lambda t}$　に代入して　$N_0 = Ce^0$　したがって　$C = N_0$

よって　初期条件を満たす解は

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

このことから放射能強度は時間とともに指数関数的に減衰していく。
また崩壊定数 λ が大きい放射性物質ほど速やかに減衰していく。

4 粘性液体中の物体の運動

物体が液体中を粘性力による抵抗を受けて運動するとき、物体の速度 v は時間 t を独立変数とする関数であって、次のような一階微分方程式に従う。

$$m\frac{dv}{dt} = -kv$$

ただし m は物体の質量であり、k は物体の形状や液体の粘性の度合によって決まる正の定数である。
最初の時刻 $t=0$ では速度 v_0 であるとすると、この微分方程式の解の中、初期条件として $t=0$ のとき $v=v_0$ を満足する関数 v を求める問題となる。

解法

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \quad \text{より} \quad \frac{1}{v}\,dv = -\frac{k}{m}\,dt$$

$$\int \frac{1}{v}\,dv = -\int \frac{k}{m}\,dt + c\,, \qquad (c\ \text{は任意定数})$$

$$\log_e |v| = -\frac{k}{m}t + c$$

$$v = e^{-\frac{k}{m}t + c} = e^{-\frac{k}{m}t}e^c = e^{-\frac{k}{m}t}C\,, \qquad (\text{ただし}\ C = e^c)$$

一般解は　$v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$

初期条件　$t=0$　のとき　$v=v_0$　を一般解　$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$　に代入して　$v_0 = Ce^0$　したがって　$C = v_0$

よって　初期条件を満たす解は

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

このことから粘性液体中の物体の速度は時間とともに指数関数的に減衰していく。

5　コイルと抵抗の直列回路を流れる電流

コイルと抵抗器が直列接続された電気回路に、電圧 V の電池を用いて電流を通すとき、この回路に流れる電流 i は時間 t を独立変数とする関数であって、次のような一階線形微分方程式に従う。

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i \;=\; \frac{V}{L}$$

ただし L はコイルのインダクタンスと呼ばれる定数であり、R は抵抗器の抵抗であって定数である。

解法

1 階線形微分方程式　$\dfrac{dy}{dx} + P(x)\,y \;=\; Q(x)$　の解の公式

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$　を用いる。

$y = i,\quad x = t,\quad P(x) = \dfrac{R}{L},\quad Q(x) = \dfrac{V}{L}$　として公式を適用すると

$$i \;=\; e^{-\int \frac{R}{L}\,dt}\left(\int \frac{V}{L}e^{\int \frac{R}{L}\,dt}dt + C\right) \;=\; e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int \frac{V}{L}e^{\frac{R}{L}t}\,dt + C\right) \;=\; e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{V}{L}\,\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C\right)$$

一般解は　$i = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\dfrac{V}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C\right)$

初期条件　$t = 0$　のとき　$i = 0$　を一般解　$i = e^{-\frac{R}{L}t}\left(\dfrac{V}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C\right)$　に代入して　$0 = e^{0}\left(\dfrac{V}{R}e^{0} + C\right)$

したがって　$C = -\dfrac{V}{R}$

よって　初期条件を満たす解は

$$i \;=\; e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{V}{R}e^{\frac{R}{L}t} - \frac{V}{R}\right) \;=\; \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

上式において示されているように、コイルの影響により最初から　$i = \frac{V}{R}$　の値の電流は流れない。電流は零の値から時間 t とともに増加し、$i = \frac{V}{R}$　の値に限りなく近づいていく。ここでコイルのインダクタンスとは、コイル自身の形状によって決まる定数で、コイルの直径が大きく且つ巻き数が多いほど大きな値をもつ。
インダクタンスが大きいと、電流の時間的変化を妨げようとする性質が強いコイルとなる。すなわち急激な電流の変化が生じ難くなる。

6　生物個体数の時間的変化

生物個体数 N の時間的変化は次のような 1 階微分方程式に従うという説がある。この微分方程式はロジスティック方程式と呼ばれる。

$$\frac{dN}{dt} = (a - bN)N$$

ただし a, b は環境条件や栄養資源の状況によって定まる既知の定数である。
初期条件を 時刻 $t = 0$ のとき $N = N_0$ として、この解を求める。

解法

$\dfrac{dN}{dt} = (a - bN)N$　より　$\dfrac{1}{(a - bN)N}\,dN = dt$

$\displaystyle\int \frac{1}{(a - bN)N}\,dN = \int dt + c\;,$　(c は任意定数)

ここで　$\dfrac{1}{(a - bN)N} = \dfrac{\alpha}{a - bN} + \dfrac{\beta}{N}$　とおいて　$\alpha,\ \beta$　を定める。

$$\frac{\alpha}{a-bN}+\frac{\beta}{N} \;=\; \frac{(\alpha-b\beta)N+a\beta}{(a-bN)N} \;=\; \frac{1}{(a-bN)N}$$ より $\alpha-b\beta=0$ かつ $a\beta=1$ でなければならないから

$\alpha=\dfrac{b}{a}$ かつ $\beta=\dfrac{1}{a}$ となる。

すなわち $\quad \dfrac{1}{(a-bN)N} \;=\; \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{b}{a-bN}+\dfrac{1}{N}\right)$

したがって $\quad \displaystyle\int \frac{1}{a}\left(\frac{b}{a-bN}+\frac{1}{N}\right)\,dN = \int dt + c\;,\quad$ (c は任意定数)

$-\log_e|a-bN|+\log_e|N| = at+c'\;,\qquad$ (ただし $c'=ac$)

$$\log_e\left|\frac{N}{a-bN}\right| = at+c'$$

$\dfrac{N}{a-bN} = e^{at+c'} = e^{at}e^{c'} = e^{at}C\;,\qquad$ (ただし $C=e^{c'}$)

$$N=(a-bN)e^{at}C$$

一般解は $\quad N=\dfrac{aCe^{at}}{1+bCe^{at}}$

次に初期条件 ($t=0$ のとき $N=N_0$) を用いて任意定数 C を定める。

$t=0,\quad N=N_0$ を一般解 $\quad N=\dfrac{aCe^{at}}{1+bCe^{at}}\quad$ に代入すると $\quad N_0=\dfrac{aCe^0}{1+bCe^0} \;=\; \dfrac{aC}{1+bC}\quad$ より $\quad N_0(1+bC)=aC$

したがって $\quad C=\dfrac{N_0}{a-bN_0}$

$$N=\frac{a\left(\frac{N_0}{a-bN_0}\right)e^{at}}{1+b\left(\frac{N_0}{a-bN_0}\right)e^{at}} \;=\; \left(\frac{aN_0e^{at}}{a-bN_0}\right)\left(\frac{a-bN_0}{a-bN_0+bN_0e^{at}}\right) \;=\; \frac{aN_0e^{at}}{a-bN_0+bN_0e^{at}} \;=\; \frac{aN_0e^{at}}{a+bN_0(e^{at}-1)}$$

よって　初期条件を満たす解は

$$N=\frac{aN_0e^{at}}{a+bN_0(e^{at}-1)}$$

この解は、時間 $t\to\infty$ において N は一定値 $\dfrac{a}{b}$ に限りなく近づいていく。

すなわち この解のグラフは $t\to\infty$ では、直線 $N=\dfrac{a}{b}=N_c$ を漸近線とする。

a が大きい程 $N_c=\dfrac{a}{b}$ の値は増加するので、定数 a は生物個体にとって良好な環境条件を与えるパラメーターである。

b が大きくなると $N_c=\dfrac{a}{b}$ の値は減少するので、定数 b は生物個体にとって劣悪な環境条件を与えるパラメーターとなる。

ロジスティック方程式の解は a が b に比較して極めて大きいとき、すなわち $a\gg b$ のとき、近似的に指数関数

$$N\approx N_0e^{at}$$

でもって記せる。

7　一定の力による物体の運動

一定の力 F の作用により物体が運動するとき、物体の位置 y は時間 t を独立変数とする関数であって、次のような二階微分方程式に従っている。この方程式はニュートンの運動方程式と呼ばれる。

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=F$$

ただし m は物体の質量であって、正の定数である。

最初の時刻 $t=0$ では速度 $\frac{dy}{dt}$ が v_0 かつ 位置が y_0 であるとすると、この微分方程式の解の中、初期条件として

$t=0$ のとき $\frac{dy}{dt}=v_0$ かつ $y=y_0$ を満足するような関数 y を求める問題となる。

解法

$m\dfrac{d^2y}{dt^2}=F$ より $\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{F}{m}$, ここで $a=\dfrac{F}{m}$ とおいて $\dfrac{d^2y}{dt^2}=a$, (ここで a は加速度と呼ばれる。)

$\dfrac{dy}{dt}=\displaystyle\int a\ dt+C_1\ =\ at+C_1$, (C_1 は任意定数)

$y=\displaystyle\int(at+C_1)\ dt+C_2$, (C_2 は任意定数)

一般解は $y=\dfrac{1}{2}at^2+C_1t+C_2$

初期条件 $t=0$ のとき $\dfrac{dy}{dt}=v_0$ を $\dfrac{dy}{dt}=at+C_1$ に代入して $v_0=a\times 0+C_1$

したがって $C_1=v_0$ となるので $y=\dfrac{1}{2}at^2+v_0t+C_2$

さらに初期条件 $t=0$ のとき $y=y_0$ を $y=\dfrac{1}{2}at^2+v_0t+C_2$ に代入して $y_0=\dfrac{1}{2}a\times 0^2+v_0\times 0+C_2$

したがって $C_2=y_0$

よって 初期条件を満たす解は

$$y=\frac{1}{2}at^2+v_0t+y_0$$

このことから一定の力による運動では、位置 y は時間 t の 2 次関数で記せる。

8 単振動

物体の位置を y とするとき、物体に作用する力 F が常に $-ky$ なる関数で与えられるとき、この物体の運動は次のような二階線形微分方程式に従う。

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky$$

ただし m は物体の質量、k は正の定数である。
最初の時刻 $t=0$ では速度 $\frac{dy}{dt}=0$ かつ 位置が $y=A_0$ であるとすると、この微分方程式の解の中、初期条件として $t=0$ のとき $\frac{dy}{dt}=0$ かつ $y=A_0$ を満足するような関数 y を求める問題となる。

解法

$m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-ky$ より $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{k}{m}y$, ここで $\omega^2=\dfrac{k}{m}$ とおいて $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2y$, (ω は角振動数)

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0$, ここで $y=e^{pt}$ とおいて代入すると $\dfrac{d^2}{dt^2}e^{pt}+\omega^2e^{pt}=0$ より $p^2e^{pt}+\omega^2e^{pt}=0$

すなわち $(p^2+\omega^2)e^{pt}=0$, したがって特性方程式は $p^2+\omega^2=0$ となる。
この特性方程式の解は $p=\pm\sqrt{-\omega^2}\ =\ \pm\omega i\ =\ 0\pm\omega i$, (ただし $i=\sqrt{-1}$)
特性方程式の解が虚数解 $h\pm ni$ をもつとき、二階線形微分方程式の解の公式は
$y=e^{hx}(C_1\cos nx+C_2\sin nx)$ であったので、これを適用すると $h=0,\quad n=\omega,\quad x=t$ とおけばよい。
したがって $y=e^0(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)$
一般解は $y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$, (ただし $C_1,\ C_2$ は任意定数)

そこで $\dfrac{dy}{dt}=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t$ となるので、初期条件 $t=0$ のとき $\dfrac{dy}{dt}=0$ を代入して

$0 = -C_1\omega\sin 0 + C_2\omega\cos 0$　したがって　$C_2 = 0$
すなわち　$y = C_1\cos\omega t$
さらに初期条件　$t = 0$　のとき　$y = A_0$　を代入して　$A_0 = C_1\cos 0$，　したがって　$C_1 = A_0$
よって　初期条件を満足する解は
　$y = A_0\cos\omega t$
ここで A_0 は振幅と呼ばれる。このことから単振動は時間 t を独立変数とする三角関数でもって記せる。

9　減衰振動

物体の位置を y，速度を $\frac{dy}{dt}$ とするとき、物体に作用する力 F が常に $-ky - 2c\frac{dy}{dt}$ なる関数で与えられるとき、この物体の運動は次のような二階線形微分方程式に従う。

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - 2c\frac{dy}{dt}$$

ただし m は物体の質量、k と c は正の定数である。
最初の時刻 $t = 0$ では速度 $\frac{dy}{dt} = 0$ かつ 位置が $y = A_0$ であるとすると、この微分方程式の解の中、初期条件として $t = 0$ のとき　$\frac{dy}{dt} = 0$　かつ　$y = A_0$　を満足するような関数 y を求める問題となる。

解法

$$m\frac{d^2y}{dt^2} \;=\; -ky - 2c\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \;=\; -\omega^2 y - 2\eta\,\frac{dy}{dt}\,,\qquad \text{ただし}\quad \omega^2 = \frac{k}{m}\,,\quad \eta = \frac{c}{m}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\eta\,\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0\,,\quad \text{ここで}\quad y = e^{pt}\quad \text{とおいて代入すると}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{pt} + 2\eta\,\frac{d}{dt}e^{pt} + \omega^2 e^{pt} = 0 \qquad \text{より} \qquad p^2 e^{pt} + 2\eta p e^{pt} + \omega^2 e^{pt} = 0$$

したがって特性方程式は　$p^2 + 2\eta p + \omega^2 = 0$　となる。

この特性方程式の解は　$p \;=\; \dfrac{1}{2}\left(-2\eta \pm \sqrt{4\eta^2 - 4\omega^2}\right) \;=\; -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega^2}$

(i)　$\eta^2 - \omega^2 > 0$　のとき p は実数解
特性方程式の解が実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつとき、2 階線形微分方程式の解の公式は
$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$　であったので、これを適用すると
$\alpha = -\eta + \sqrt{\eta^2 - \omega^2},\qquad \beta = -\eta - \sqrt{\eta^2 - \omega^2},\qquad x = t$　とおけばよい。

よって　一般解は

$$y = C_1 e^{-\eta t + \sqrt{\eta^2 - \omega^2}\;t} + C_2 e^{-\eta t - \sqrt{\eta^2 - \omega^2}\;t}\,,\quad (\text{ただし } C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

$$= e^{-\eta t}\left(C_1 e^{\sqrt{\eta^2 - \omega^2}\;t} + C_2 e^{-\sqrt{\eta^2 - \omega^2}\;t}\right)$$

(ii)　$\eta^2 - \omega^2 = 0$　のとき p は重解
特性方程式の解が重解 α をもつとき、2 階線形微分方程式の解の公式は
$y = (C_1 + C_2 x)e^{\alpha x}$　であったので、これを適用すると
$\alpha = -\eta$　とおけばよい。
よって　一般解は
$y = (C_1 + C_2 t)e^{-\eta t}$

(iii) $\eta^2 - \omega^2 < 0$ のとき p は虚数解
特性方程式の解が虚数解 $h \pm ni$ をもつとき、2 階線形微分方程式の解の公式は
$y = e^{hx}(C_1 \cos nx + C_2 \sin nx)$ 　であったので、これを適用すると
$h = -\eta, \quad n = \sqrt{\omega^2 - \eta^2}$ 　とおけばよい。
よって　一般解は
$y = e^{-\eta t}\left(C_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \eta^2}\ t + C_2 \sin \sqrt{\omega^2 - \eta^2}\ t\right)$

これらのことから **(iii)** のときの一般解は、時間を独立変数とする三角関数を含むので振動を表す。
また時間を独立変数とする指数関数の寄与により、この振動は時間とともに振幅が減少していく。
(i) と **(ii)** のときの一般解は、時間を独立変数とする指数関数のみを含むので、繰り返しの振動運動とはならない。

次に前述の **(i)**, **(ii)**, **(iii)** について、初期条件 $t = 0$ のとき $\dfrac{dy}{dt} = 0$ かつ $y = A_0$ を満たす解を求める。

(i) $\eta^2 - \omega^2 > 0$ のとき、一般解は　$y = e^{-\eta t}\left(C_1 e^{\sqrt{\eta^2-\omega^2}\ t} + C_2 e^{-\sqrt{\eta^2-\omega^2}\ t}\right) + C_2 e^{-\eta t - \sqrt{\eta^2-\omega^2}\ t}$

$$\frac{dy}{dt} = -\eta e^{-\eta t}\left(C_1 e^{\sqrt{\eta^2-\omega^2}\ t} + C_2 e^{-\sqrt{\eta^2-\omega^2}\ t}\right) + e^{-\eta t}\left(C_1\sqrt{\eta^2-\omega^2}\ e^{\sqrt{\eta^2-\omega^2}\ t} - C_2\sqrt{\eta^2-\omega^2}\ e^{-\sqrt{\eta^2-\omega^2}\ t}\right)$$

$$A_0 = e^0\left(C_1 e^0 + C_2 e^0\right) + C_2 e^0$$
$$0 = -\eta e^0\left(C_1 e^0 + C_2 e^0\right) + e^0\left(C_1\sqrt{\eta^2-\omega^2}\ e^0 - C_2\sqrt{\eta^2-\omega^2}\ e^0\right)$$

すなわち
$$A_0 = C_1 + C_2$$
$$0 = \left(\sqrt{\eta^2-\omega^2} - \eta\right)C_1 + \left(-\sqrt{\eta^2-\omega^2} - \eta\right)C_2$$

したがって　$C_1 = A_0, \quad C_2 = 0$

よって　初期条件を満足する解は　$y = A_0 e^{\left(-\eta + \sqrt{\eta^2-\omega^2}\right)t}$

(ii) $\eta^2 - \omega^2 = 0$ のとき、一般解は　$y = (C_1 + C_2 t)e^{-\eta t}$

$$\frac{dy}{dt} = C_2 e^{-\eta t} - \eta\left(C_1 + C_2 t\right)e^{-\eta t}$$

$$A_0 = (C_1 + C_2 \times 0)\,e^0$$
$$0 = C_2 - \eta\left(C_1 + C_2 \times 0\right)e^0$$

したがって　$C_1 = A_0, \quad C_2 = \eta A_0$

よって　初期条件を満足する解は　$y = A_0(1+\eta)e^{-\eta t}$

(iii) $\eta^2 - \omega^2 < 0$ のとき、一般解は　$y = e^{-\eta t}\left(C_1 \cos\sqrt{\omega^2-\eta^2}\ t + C_2 \sin\sqrt{\omega^2-\eta^2}\ t\right)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} = &-\eta e^{-\eta t}\left(C_1 \cos\sqrt{\omega^2-\eta^2}\ t + C_2 \sin\sqrt{\omega^2-\eta^2}\ t\right)\\ &+e^{-\eta t}\left(-C_1\sqrt{\omega^2-\eta^2}\sin\sqrt{\omega^2-\eta^2}\ t + C_2\sqrt{\omega^2-\eta^2}\cos\sqrt{\omega^2-\eta^2}\ t\right)\end{aligned}$$

$$A_0 = e^0\left(C_1\cos 0 + C_2 \sin 0\right)$$
$$0 = -\eta e^0\left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) + e^0\left(-C_1\sqrt{\omega^2-\eta^2}\sin 0 + C_2\sqrt{\omega^2-\eta^2}\cos 0\right)$$

すなわち

$A_0 = C_1$

$0 = C_1 + C_2\sqrt{\omega^2 - \eta^2}$

したがって　$C_1 = A_0$,　 $C_2 = \dfrac{-A_0}{\sqrt{\omega^2 - \eta^2}}$

よって　初期条件を満足する解は　 $y = A_0 e^{-\eta t}\left(\cos\sqrt{\omega^2 - \eta^2}\ t - \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2 - \eta^2}}\sin\sqrt{\omega^2 - \eta^2}\ t\right)$