積分　integral

1　不定積分

関数 $f(x)$ に対して、$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ を満たすような関数 $F(x)$ を求める演算操作のことを不定積分と呼び、次式のように表記する。

$$F(x) \ = \ \int f(x)\ dx + C$$

ただし C は積分定数と呼ばれる任意定数である。したがって

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int f(x)\ dx + \frac{d}{dx}C \ = \ f(x)$$

となる。このとき $F(x)$ を原始関数という。すなわち積分は微分の逆演算である。

2　不定積分の一般公式

二つの関数を $f(x), g(x)$ とし、定数を c とするとき、次の式が成り立つ。

$$\int [f(x) \pm g(x)]\ dx \ = \ \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$$

$$\int cf(x)\ dx \ = \ c\int f(x)\ dx$$

3　関数の不定積分

（ただし 積分定数 C は省略）

$$\int x^n\ dx \ = \ \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \qquad (\ n \text{ は実数　かつ　} n \neq -1\ )$$

$$\int x^{-1}\ dx \ = \ \int \frac{1}{x}\ dx \ = \ \log_e |x|$$

$$\int \sin x\ dx \ = \ -\cos x$$

$$\int \cos x\ dx \ = \ \sin x$$

$$\int \tan x\ dx \ = \ -\log_e |\cos x|$$

$$\int \sec^2 x\ dx \ = \ \int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx \ = \ \tan x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx \ = \ \frac{-1}{\tan x}$$

$$\int a^x\ dx \ = \ \frac{a^x}{\log_e a}, \qquad (\ a > 0 \text{　かつ　} a \neq 1\ )$$

$$\int e^x\ dx \ = \ e^x$$

$$\int \log_e x\ dx \ = \ x\log_e x - x, \qquad (\text{ただし　} x > 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \ = \ \arcsin x$$
$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \ = \ \arccos x$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx \ = \ \arctan x$$
$$\int \arcsin x\ dx \ = \ x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$
$$\int \arccos x\ dx \ = \ x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$$
$$\int \arctan x\ dx \ = \ x\arctan x - \frac{1}{2}\log_e(1+x^2)$$
$$\int \sinh x\ dx \ = \ \cosh x$$
$$\int \cosh x\ dx \ = \ \sinh x$$
$$\int \tanh x\ dx \ = \ \log_e|\cosh x|$$
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\ dx \ = \ \frac{1}{2a}\log_e\left|\frac{x-a}{x+a}\right|, \qquad (a \neq 0)$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\ dx \ = \ \log_e|x+\sqrt{x^2+A}\ |, \qquad (A \neq 0)$$

［例］

$$\int \left(8+2x+3x^2+4x^3+5x^4+x^{-1}-x^{-2}-2x^{-3}\right)dx \ = \ 8x+x^2+x^3+x^4+x^5+\log_e|x|+x^{-1}+x^{-2}+C$$
$$\int (3\sin x+5\cos x+7\tan x)\,dx \ = \ -3\cos x+5\sin x-7\log_e|\cos x|+C$$
$$\int (2^x+e^x+\log_e x)\,dx \ = \ \frac{2^x}{\log_e 2}+e^x+x\log_e x-x+C, \qquad (\text{ただし}\ \ x>0)$$

4　置換積分法

関数 $f(g(x))$ の積分については、次のような置換積分の方法が用いられる。

$\int f\left(g(x)\right)\ dx$　の積分方法は　$t=g(x)$　と置いて変数 x を t に変換し、変数 t について積分した後、 $t=g(x)$　より変数 t を元の変数 x に戻して結果を表す。

［例］

$$\int (ax+b)^n\ dx, \qquad (\text{ただし}\ a,\ b,\ n\ \text{は定数})$$

$t=ax+b$　と置くと、 $(ax+b)^n \ = \ t^n$　かつ　$\dfrac{dt}{dx} \ = \ \dfrac{d}{dx}(ax+b) \ = \ a$

すなわち　$\dfrac{dt}{dx} \ = \ a$　より、 $dx \ = \ \dfrac{1}{a}\ dt$　となるので

$$= \int t^n\ \frac{1}{a}\ dt \ = \ \frac{1}{a}\int t^n\ dt \ = \ \frac{1}{a(n+1)}t^{n+1}+C\ ,$$　ここで　$t=ax+b$　であったから

$$= \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C, \qquad (C\ \text{は積分定数})$$

［例］

$$\int \sin(ax+b)\ dx, \qquad (\text{ただし } a,\ b \text{ は定数})$$

$t = ax+b$ と置くと、 $\sin(ax+b)\ = \sin t$ かつ $\dfrac{dt}{dx} \ = \ \dfrac{d}{dx}(ax+b) \ = \ a$

すなわち $dx = \dfrac{1}{a}\ dt$ となるので

$$= \int (\sin t)\ \frac{1}{a}\ dt \ = \ \frac{1}{a}\int \sin t\ dt \ = \ \frac{-1}{a}\cos t + C$$

$$= \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + C$$

［例］

$$\int (ax+b)^{-1}\ dx, \qquad (\text{ただし } a,\ b \text{ は定数})$$

$t = ax+b$ と置くと、 $(ax+b)^{-1} \ = \ t^{-1}$ かつ $dx = \dfrac{1}{a}\ dt$ となるので

$$= \int t^{-1}\ \frac{1}{a}\ dt \ = \ \frac{1}{a}\int \frac{1}{t}\ dt \ = \ \frac{1}{a}\log_e |t| + C$$

$$= \frac{1}{a}\log_e |ax+b| + C$$

［例］

$$\int e^{ax+b}\ dx, \qquad (\text{ただし } a,\ b \text{ は定数})$$

$t = ax+b$ と置くと、 $e^{ax+b} \ = \ e^t$ かつ $dx = \dfrac{1}{a}\ dt$ となるので

$$= \int e^t\ \frac{1}{a}\ dt \ = \ \frac{1}{a}\int e^t\ dt \ = \ \frac{1}{a}e^t + C$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

［例］

$$\int \tan(ax+b)\ dx, \qquad (\text{ただし } a,\ b \text{ は定数})$$

$\tan(ax+b) \ = \ \dfrac{\sin(ax+b)}{\cos(ax+b)}$ より $t = \cos(ax+b)$ と置くと、 $\dfrac{dt}{dx} \ = \ \dfrac{d}{dx}\cos(ax+b) \ = \ -a\sin(ax+b)$

すなわち $dx = \dfrac{1}{-a\ \sin(ax+b)}\ dt$ となるので

$$= \int \frac{\sin(ax+b)}{t}\left[\frac{1}{-a\ \sin(ax+b)}\right]\ dt \ = \ \frac{1}{-a}\int \frac{1}{t}\ dt \ = \ \frac{-1}{a}\log_e |t| + C$$

$$= \frac{-1}{a}\log_e |\cos(ax+b)| + C$$

5 部分積分法

二つの関数 $f(x)$, $g(x)$ があるとき、次の公式で与えるような積分が可能である。

$$\int f(x)\ g'(x)\ dx \ = \ f(x)\ g(x) - \int f'(x)\ g(x)\ dx$$

［例］

$$\int 5xe^{3x}\ dx$$

$f(x) = 5x, \quad g'(x) = e^{3x}$ 　とおくと

$f'(x) \ = \ \dfrac{d}{dx}(5x) \ = \ 5$ 　かつ　$g(x) \ = \ \displaystyle\int g'(x)\ dx \ = \ \int e^{3x}\ dx \ = \ \frac{e^{3x}}{3}$ 　であるから

$$= 5x\ \frac{e^{3x}}{3} - \int 5\ \frac{e^{3x}}{3}\ dx \ = \ \frac{5}{3}xe^{3x} - \frac{5}{3}\int e^{3x}\ dx \ = \ \frac{5}{3}xe^{3x} - \frac{5}{3}\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) + C$$

$$= \frac{5}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C$$

［例］

$$\int \sin x\ e^{2x}\ dx$$

$f(x) = \sin x, \quad g'(x) = e^{2x}$ 　とおくと

$f'(x) \ = \ \dfrac{d}{dx}\sin x \ = \ \cos x$ 　かつ　$g(x) \ = \ \displaystyle\int g'(x)\ dx \ = \ \int e^{2x}\ dx \ = \ \frac{e^{2x}}{2}$ 　であるから

$$= \sin x\ \frac{e^{2x}}{2} - \int \cos x\ \frac{e^{2x}}{2}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x\ e^{2x} - \frac{1}{2}\int \cos x\ e^{2x}\ dx$$

第 2 項について再び部分積分の方法を適用する。

$f_1(x) = \cos x, \quad g_1'(x) = e^{2x}$ 　とおくと

$f_1'(x) \ = \ \dfrac{d}{dx}\cos x \ = \ -\sin x$ 　かつ　$g_1(x) \ = \ \displaystyle\int g_1'(x)\ dx \ = \ \int e^{2x}\ dx \ = \ \frac{e^{2x}}{2}$ 　であるから

$$= \frac{1}{2}\sin x\ e^{2x} - \frac{1}{2}\left[\cos x\ \frac{e^{2x}}{2} - \int (-\sin x)\frac{e^{2x}}{2}\ dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sin x\ e^{2x} - \frac{1}{4}\cos x\ e^{2x} - \frac{1}{4}\int \sin x\ e^{2x}\ dx$$

ここで第 3 項を左辺に移項して

$$\int \sin x\ e^{2x}\ dx + \frac{1}{4}\int \sin x\ e^{2x}\ dx \ = \ \frac{1}{2}\sin x\ e^{2x} - \frac{1}{4}\cos x\ e^{2x}$$

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)\int \sin x\ e^{2x} \ = \ \frac{1}{2}\sin x\ e^{2x} - \frac{1}{4}\cos x\ e^{2x}$$

$$\int \sin x\ e^{2x}\ dx \ = \ \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\sin x\ e^{2x} - \frac{1}{4}\cos x\ e^{2x}\right) + C$$

$$\int \sin x\ e^{2x}\ dx \ = \ \frac{1}{5}e^{2x}\left(2\sin x - \cos x\right) + C$$

6　定積分

関数 $f(x)$ の定積分について述べる。

関数 $f(x)$ の不定積分　$F(x) \ = \ \displaystyle\int f(x)\ dx$ 　において、$x = a$ から　$x = b$ までの定積分　$\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ 　とは

次式により与えられる。

$$\int_a^b f(x)\ dx \ = \ [\ F(x)\ ]_a^b \ = \ F(b)-F(a)$$

7　定積分の一般公式

二つの関数を $f(x)$, $g(x)$ とし、定数を c とするとき、次の式が成り立つ。

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\ dx \ = \ \int_a^b f(x)\ dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$$

$$\int_a^b cf(x)\ dx \ = \ c\int_a^b f(x)\ dx$$

[例]

$$\int_a^b x^n\ dx \ = \ \left[\ \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ \right]_a^b \ = \ \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right)\ , \qquad (\ n \text{ は実数 かつ } n \neq -1\ )$$

[例]

$$\int_a^b x^{-1}\ dx \ = \ [\ \log_e|x|\ ]_a^b \ = \ \log_e|b| - \log_e|a|$$

[例]

$$\int_0^\pi \sin x\ dx \ = \ [\ -\cos x\ ]_0^\pi \ = \ -\cos\pi - (-\cos 0) \ = \ -(-1)-(-1) \ = \ 2$$

[例]

$$\int_0^\pi \cos x\ dx \ = \ [\ \sin x\ ]_0^\pi \ = \ \sin\pi - \sin 0 \ = \ 0-0 \ = \ 0$$

[例]

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\ dx \ &= \ [\ -\log_e(\cos x)\ ]_0^{\frac{\pi}{3}} \ = \ -\log_e(\cos\frac{\pi}{3}) - [-\log_e(\cos 0)] \ = \ -\log_e\left(\frac{1}{2}\right)+\log_e(1) \ = \ -\log_e\left(\frac{1}{2}\right)+0 \\ &= -[\log_e(1)-\log_e(2)] \ = \ -[0-\log_e(2)] \ = \ \log_e 2\end{aligned}$$

[例]

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\ dx \ = \ [\ \tan x\ ]_0^{\frac{\pi}{4}} \ = \ \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[例]

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x}\ dx \ = \ \left[\ \frac{-1}{\tan x}\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \ = \ \frac{-1}{\tan\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}} \ = \ -\sqrt{2}+2$$

[例]

$$\int_0^1 a^x\ dx \ = \ \left[\ \frac{a^x}{\log_e a}\ \right]_0^1 \ = \ \frac{a^1}{\log_e a} - \frac{a^0}{\log_e a} \ = \ \frac{a-1}{\log_e a}\ , \qquad (\ a>0 \text{ かつ } a\neq 1\ )$$

[例]

$$\int_0^1 e^x\ dx \ = \ [\ e^x\ ]_0^1 \ = \ e^1 - e^0 \ = \ e-1$$

［例］

$$\int_1^2 \log_e x \ dx \ = \ [\ x \ \log_e x - x\ ]_1^2 \ = \ 2 \ \log_e 2 - 2 - \log_e 1 + 1 \ = \ 2 \ \log_e 2 - 1$$

［例］

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ dx \ = \ [\ \arcsin x\ ]_0^{\frac{1}{2}} \ = \ \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 \ = \ \frac{\pi}{6} - 0 \ = \ \frac{\pi}{6}$$

［例］

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ dx \ = \ [\ \arccos x\ ]_0^{\frac{1}{2}} \ = \ \arccos \frac{1}{2} - \arccos 0 \ = \ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \ = \ \frac{-\pi}{6}$$

［例］

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \ dx \ = \ [\ \arctan x\ ]_0^1 \ = \ \arctan 1 - \arctan 0 \ = \ \frac{\pi}{4} - 0 \ = \ \frac{\pi}{4}$$

8　置換積分法による定積分

置換積分の方法を用いた定積分について述べる。

$\displaystyle\int_a^b f\left(g(x)\right) \ dx$ の積分方法は $t = g(x)$ と置いて変数 x を t に変換し、変数 t について積分した後、積分範囲を $g(a)$ から $g(b)$ までとして結果を求める。

［例］

$$\int_0^1 (ax+b)^n \ dx, \qquad (\text{ただし } a,\ b,\ n \text{ は定数})$$

$t = ax + b$ と置くと、$x = 0$ のとき t の値は b, $x = 1$ のとき t の値は $a + b$

また $\dfrac{dt}{dx} \ = \ \dfrac{d}{dx}(ax+b) \ = \ a$,　すなわち $dx = \dfrac{1}{a} \ dt$ より

$$= \int_b^{a+b} t^n \ \frac{1}{a} \ dt \ = \ \left[\ \frac{1}{a(n+1)} t^{n+1} \ \right]_b^{a+b} \ = \ \frac{1}{a(n+1)}(a+b)^{n+1} - \frac{1}{a(n+1)} b^{n+1}$$

$$= \frac{1}{a(n+1)} \left[(a+b)^{n+1} - b^{n+1}\right]$$

［例］

$$\int_0^1 (ax+b)^{-1} \ dx, \qquad (\text{ただし } a,\ b \text{ は定数})$$

$t = ax + b$ と置くと、$x = 0$ のとき t の値は b, $x = 1$ のとき t の値は $a + b$

また $\dfrac{dt}{dx} \ = \ \dfrac{d}{dx}(ax+b) \ = \ a$,　すなわち $dx = \dfrac{1}{a} \ dt$ より

$$= \int_b^{a+b} t^{-1} \ \frac{1}{a} \ dt \ = \ \frac{1}{a} [\ \log_e |t|\ ]_b^{a+b} \ = \ \frac{1}{a} [\log_e |a+b| - \log_e |b|] \ = \ \frac{1}{a} \log_e \left| \frac{a+b}{b} \right|$$

［例］

$$\int_0^1 e^{ax+b} \ dx, \qquad (\text{ただし } a,\ b \text{ は定数})$$

$t = ax + b$ と置くと、$x = 0$ のとき t の値は b, $x = 1$ のとき t の値は $a + b$

また $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(ax+b) = a$, すなわち $dx = \dfrac{1}{a}\ dt$ より

$$= \int_b^{a+b} e^t\ \frac{1}{a}\ dt = \frac{1}{a}\left[\ e^t\ \right]_b^{a+b} = \frac{1}{a}\left(e^{a+b} - e^b\right) = \frac{1}{a}e^b(e^a - 1)$$

［例］

$$\int_0^1 \tan(ax+b)\ dx, \qquad \text{(ただし } a,\ b \text{ は定数)}$$

$\tan(ax+b) = \dfrac{\sin(ax+b)}{\cos(ax+b)}$ より $t = \cos(ax+b)$ とおくと、

$x = 0$ のとき t の値は $\cos b$, $x = 1$ のとき t の値は $\cos(a+b)$

また $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}\cos(ax+b) = -a\sin(ax+b)$, すなわち $dx = \dfrac{1}{-a\ \sin(ax+b)}\ dt$ より

$$= \int_{\cos b}^{\cos(a+b)} \frac{\sin(ax+b)}{t}\left[\frac{1}{-a\ \sin(ax+b)}\right] dt = \frac{1}{-a}\int_{\cos b}^{\cos(a+b)} \frac{1}{t}\ dt = \left[\ \frac{-1}{a}\log_e|t|\ \right]_{\cos b}^{\cos(a+b)}$$

$$= \frac{-1}{a}\log_e|\cos(a+b)| + \frac{1}{a}\log_e|\cos b| = \frac{1}{a}\log_e\left|\frac{\cos b}{\cos(a+b)}\right|$$

9 部分積分法による定積分

二つの関数 $f(x), g(x)$ があるとき、次の公式による定積分が可能である。

$$\int_a^b f(x)\ g'(x)\ dx = \left[\ f(x)\ g(x)\ \right]_a^b - \int_a^b f'(x)\ g(x)\ dx$$

［例］

$$\int_0^1 5x\ e^{3x}\ dx$$

$f(x) = 5x,\quad g'(x) = e^{3x}$ とおくと

$f'(x) = \dfrac{d}{dx}(5x) = 5$ 並びに $g(x) = \displaystyle\int g'(x)\ dx = \int e^{3x}\ dx = \frac{e^{3x}}{3}$ より

$$= \left[\ 5x\ \frac{e^{3x}}{3}\ \right]_0^1 - \int_0^1 5\ \frac{e^{3x}}{3}\ dx = \left(\frac{5}{3}e^3 - 0\right) - \frac{5}{3}\int_0^1 e^{3x}\ dx = \frac{5}{3}e^3 - \frac{5}{3}\left[\ \frac{1}{3}e^{3x}\ \right]_0^1 = \frac{5}{3}e^3 - \frac{5}{9}(e^3 - e^0)$$

$$= \frac{10}{9}e^3 + \frac{5}{9}$$

［例］

$$\int_0^1 \sin x\ e^{2x}\ dx$$

$f(x) = \sin x,\quad g'(x) = e^{2x}$ とおくと

$f'(x) = \dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ 並びに $g(x) = \displaystyle\int g'(x)\ dx = \int e^{2x}\ dx = \frac{e^{2x}}{2}$ より

$$= \left[\ \sin x\ \frac{e^{2x}}{2}\ \right]_0^1 - \int_0^1 \cos x\ \frac{e^{2x}}{2}\ dx$$

$$= (\sin 1)\ \frac{e^2}{2} - (\sin 0)\ \frac{e^0}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos x\ e^{2x}\ dx$$

第 3 項について再び部分積分の方法を適用して

$f_1(x) = \cos x, \quad g_1'(x) = e^{2x}$ とおくと

$f_1'(x) \ = \ \dfrac{d}{dx}\cos x \ = \ -\sin x$ 並びに $g(x) \ = \ \displaystyle\int g_1'(x)\ dx \ = \ \int e^{2x}\ dx \ = \ \frac{e^{2x}}{2}$ より

$$= \ \frac{1}{2}(\sin 1)\ e^2 - (\sin 0)\ \frac{e^0}{2} - \frac{1}{2}\left\{\left[\cos x\ \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (-\sin x)\frac{e^{2x}}{2}\ dx\right\}$$

$$= \ \frac{1}{2}(\sin 1)\ e^2 - \frac{1}{2}\left\{\left(\cos 1\ \frac{e^2}{2} - \cos 0\ \frac{e^0}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin x\ e^{2x}\ dx\right\}$$

$$= \ \frac{1}{2}(\sin 1)\ e^2 - \frac{1}{4}[(\cos 1)\ e^2 - 1] - \frac{1}{4}\int_0^1 \sin x\ e^{2x}\ dx$$

ここで第 3 項を左辺に移項して

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)\int_0^1 \sin x\ e^{2x}\ dx \ = \ \frac{1}{2}(\sin 1)\ e^2 - \frac{1}{4}[(\cos 1)\ e^2 - 1]$$

$$\int_0^1 \sin x\ e^{2x}\ dx \ = \ \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}(\sin 1)\ e^2 - \frac{1}{4}(\cos 1)\ e^2 + \frac{1}{4}\right] \ = \ \frac{1}{5}\left[(2\sin 1 - \cos 1)e^2 + 1\right]$$