数学公式

常微分の定義

一変数関数 $y = f(x)$ とするとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$dy = f'(x)\,dx$$

[例] $y = x^3$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^3 &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2\end{aligned}$$

$$dy = 3x^2\,dx$$

[例] $y = \sqrt{x}$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x} &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

様々な関数についての微分

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad (\text{ただし } n \text{ は実数}), \qquad \frac{d}{dx}c = 0 \quad (\text{ただし } c \text{ は定数})$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \qquad \frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x} \qquad [\text{注}]\ e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\cdots = 2.7183\cdots \qquad (\text{無理数})$$

合成関数の微分

関数 $y = f\left(g(x)\right)$ のとき、$t = g(x)$ とおくと $y = f(t)$ となるので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

[例] $y = (x^3+1)^{10}$ のとき、$t = x^3 + 1$ とおくと $y = t^{10}$ となるので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \left[\frac{d}{dt}t^{10}\right]\left[\frac{d}{dx}(x^3+1)\right] = (10t^9)(3x^2) = 30x^2(x^3+1)^9$$

マクローリン展開の公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \qquad (\text{ただし } n \text{ は自然数})$$

ここで $f'(0) = \left[\dfrac{d}{dx}f(x)\right]_{x=0}, \quad f''(0) = \left[\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)\right]_{x=0}, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(0) = \left[\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)\right]_{x=0}, \quad \cdots$

[例] $f(x) = \sin x$ のとき、 $-\infty < x < +\infty$ において

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

偏微分の定義

三変数関数 $w=f(x,y,z)$ とするとき

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}$$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz$$

[例] $w=x^3+y^3+z^3$ のとき

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^3+z^3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[(x+\Delta x)^3+y^3+z^3]-(x^3+y^3+z^3)}{\Delta x}=3x^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^3+z^3)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[x^3+(y+\Delta y)^3+z^3]-(x^3+y^3+z^3)}{\Delta y}=3y^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(x^3+y^3+z^3)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[x^3+y^3+(z+\Delta z)^3]-(x^3+y^3+z^3)}{\Delta z}=3z^2$$

$$dw=3x^2\,dx+3y^2\,dy+3z^2\,dz$$

[例] $w=\sqrt{x+y+z}$ のとき

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x+y+z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(x+\Delta x)+y+z}-\sqrt{x+y+z}}{\Delta x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x+y+z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{x+(y+\Delta y)+z}-\sqrt{x+y+z}}{\Delta y}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x+y+z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sqrt{x+y+(z+\Delta z)}-\sqrt{x+y+z}}{\Delta z}=\frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$$dw=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx+\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy+\frac{1}{2\sqrt{z}}\,dz$$

微分の一般公式

二つの関数を $f(x)$ ならびに $g(x)$ とするとき

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\pm g(x)\right]=f'(x)\pm g'(x) \qquad \left[\text{ただし}\ \ f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)\ \ \text{ならびに}\ \ g'(x)=\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\,g(x)\right]=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

[補遺] 補助的な基本公式

$a>0,\ \ b>0$ かつ $x,\ y$ が実数のとき

$$a^x\,a^y=a^{x+y},\qquad (a^x)^y=a^{xy},\qquad (ab)^x=a^xb^x,\qquad \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad (\text{ただし}\ i=\sqrt{-1})$$

$$\log_e(xy)=\log_e x+\log_e y,\qquad \log_e\left(\frac{x}{y}\right)=\log_e x-\log_e y \qquad (\text{ただし}\ x>0\ \text{かつ}\ y>0)$$

$$\log_e x^r=r\log_e x \qquad (\text{ただし}\ r\ \text{は実数})$$

不定積分の定義（微分の逆演算）

導関数 $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ とするとき

$$y = \int f(x)\,dx + c = F(x) + c \qquad \text{(ただし } c \text{ は積分定数)} \qquad [注]\ \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

[例] $f(x) = 3x^2$ のとき

$$y = \int 3x^2\,dx + c = x^3 + c$$

様々な関数についての不定積分（以下では積分定数 c を略す。）

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \qquad \text{(ただし } n \text{ は実数 かつ } n \neq -1)$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log_e|x|$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x, \qquad \int \tan x\,dx = -\log_e|\cos x|$$

$$\int e^x\,dx = e^x, \qquad \int \log_e|x|\,dx = x\log_e|x| - x$$

置換積分法

$\displaystyle\int f\left(\phi(x)\right)\,dx$ とするとき、$t = \phi(x)$ とおくと

$$f(\phi(x)) = f(t) \text{ かつ } \frac{dt}{dx} = \phi'(x) \quad \text{すなわち} \quad dx = \frac{1}{\phi'(x)}dt \text{ なので}$$

$$\int f(\phi(x))\,dx = \int f(t)\frac{1}{\phi'(x)}dt$$

[例] $f(x) = (2x+1)^9$ のとき

$$\int (2x+1)^9\,dx \text{ において } t = 2x+1 \text{ とおくと}$$

$$(2x+1)^9 = t^9 \text{ かつ } \frac{dt}{dx} = (2x+1)' = 2 \quad \text{すなわち} \quad dx = \frac{1}{2}dt \text{ なので}$$

$$\int (2x+1)^9\,dx = \int t^9\frac{1}{2}dt = \frac{1}{10}t^{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}(2x+1)^{10}$$

部分積分法

二つの関数を $f(x)$ ならびに $g(x)$ とするとき

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad \left[\text{ただし } g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} \text{ かつ } f'(x) = \frac{df(x)}{dx}\right]$$

$$[注]\ g(x) = \int g'(x)\,dx$$

[例] $f(x) = 2x$ かつ $g'(x) = e^x$ のとき

$$\int 2xe^x\,dx = 2x\Big(\int e^x\,dx\Big) - \int (2x)'\Big(\int e^x\,dx\Big)dx = 2xe^x - \int 2e^x\,dx = 2xe^x - 2e^x = 2e^x(x-1)$$

[例] $f(x) = x$ かつ $g'(x) = \cos x$ のとき

$$\int x\cos x\,dx = x\Big(\int \cos x\,dx\Big) - \int (x)'\Big(\int \cos x\,dx\Big)dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x - (-\cos x)$$

$$= x\sin x + \cos x$$

定積分

不定積分　$\int f(x)\,dx = F(x)$　とするとき

$$定積分\quad \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \qquad (ただし\ a\ と\ b\ は実数)$$

[例]　$f(x) = 3x^2$ かつ $a = 2$ ならびに $b = 4$ のとき

$$\int_2^4 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_2^4 = 4^3 - 2^3 = 64 - 8 = 56$$

[例]　$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ かつ $a = 1$ ならびに $b = 9$ のとき

$$\int_1^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \left[\sqrt{x}\right]_1^9 = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2$$

[例]　$f(x) = (2x+1)^9$ かつ $a = -\frac{1}{2}$ ならびに $b = 0$ のとき

$t = 2x + 1$　と置くと　$t_a = 2a + 1 = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 = 0$　ならびに　$t_b = 2 \times 0 + 1 = 1$

また　$(2x+1)^9 = t^9$　かつ　$\dfrac{dt}{dx} = (2x+1)' = 2$　すなわち　$dx = \dfrac{1}{2}dt$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x+1)^9\,dx = \int_{t_a}^{t_b} t^9 \frac{1}{2}dt = \int_0^1 t^9 \frac{1}{2}dt = \left[\frac{t^{10}}{10}\right]_0^1 \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{10} - \frac{0}{10}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

様々な関数についての定積分

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \qquad (ただし\ n\ は実数\ かつ\ n \neq -1)$$

$$\int_a^b x^{-1}\,dx = \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log_e|b| - \log_e|a|$$

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = 2, \qquad \int_0^\pi \cos x\,dx = 0, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \log_e \sqrt{2}$$

$$\int_0^\infty \cos\left(x^2\right)\,dx = \int_0^\infty \sin\left(x^2\right)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\pi}$$

積分の一般公式

二つの関数を $f(x)$ ならびに $g(x)$ とし、定数係数を c とするとき

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

一階常微分方程式の解法（変数分離形）

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx + c \qquad (\text{ただし } c \text{ は積分定数})$$

[例]

$$\frac{dy}{dx} = ay \qquad (\text{ただし } a \text{ は定数})$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = a \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{y}dy = a\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int a\,dx + c \qquad (\text{ただし } c \text{ は積分定数})$$

$$\log_e y = ax + c$$

$$y = e^{ax+c} = Ce^{ax} \qquad (\text{ただし } C = e^c)$$

[例]

$$\frac{dy}{dx} = axy \qquad (\text{ただし } a \text{ は定数})$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = ax \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{y}dy = ax\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int ax\,dx + c \qquad (\text{ただし } c \text{ は積分定数})$$

$$\log_e y = \frac{1}{2}ax^2 + c$$

$$y = e^{\frac{1}{2}ax^2+c} = Ce^{\frac{1}{2}ax^2} \qquad (\text{ただし } C = e^c)$$

二階常微分方程式の解法（定数係数）

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \qquad (\text{ただし } b \text{ と } c \text{ は定数})$$

$y = e^{tx}$ と置いて左辺に代入　　(ただし t は未知数)

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{tx} + b\frac{d}{dx}e^{tx} + ce^{tx} = 0$$

$$t^2e^{tx} + bte^{tx} + ce^{tx} = (t^2 + bt + c)e^{tx} = 0 \qquad (\text{ただし } e^{tx} \neq 0)$$

$t^2 + bt + c = 0$　:　特性方程式

特性方程式の解　$t = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$

(i)　解 t が二つの実数解 α と β になるとき　$y = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{\beta x}$　　(ただし c_1 と c_2 は任意定数)

(ii)　解 t が重解 γ になるとき　$y = (c_1 + c_2x)e^{\gamma x}$

(iii)　解 t が虚数解 $n \pm ki$ になるとき　$y = e^{nx}(c_1 \cos kx + c_2 \sin kx)$

[例]

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=0$$

$y=e^{tx}$　と置いて左辺に代入

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{tx}-3\frac{d}{dx}e^{tx}+2e^{tx}=0$$

$t^2e^{tx}-3te^{tx}+2e^{tx}=(t^2-3t+2)e^{tx}=0$　　(ただし $e^{tx}\neq 0$)

$t^2-3t+2=0$

$t=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}$　:　実数解　すなわち　$t=\alpha=\dfrac{3+1}{2}=2$　かつ　$t=\beta=\dfrac{3-1}{2}=1$

$y=c_1e^{2x}+c_2e^{x}$

[例]

$$\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+9y=0$$

$y=e^{tx}$　と置いて左辺に代入

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{tx}-6\frac{d}{dx}e^{tx}+9e^{tx}=0$$

$t^2e^{tx}-6te^{tx}+9e^{tx}=(t^2-6t+9)e^{tx}=0$　　(ただし $e^{tx}\neq 0$)

$t^2-6t+9=0$

$t=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3$　:　重解　すなわち　$t=\gamma=3$

$y=(c_1+c_2x)e^{3x}$

[例]

$$\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+25y=0$$

$y=e^{tx}$　と置いて左辺に代入

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{tx}-8\frac{d}{dx}e^{tx}+25e^{tx}=0$$

$t^2e^{tx}-8te^{tx}+25e^{tx}=(t^2-8t+25)e^{tx}=0$　　(ただし $e^{tx}\neq 0$)

$t^2-8t+25=0$

$t=\dfrac{8\pm\sqrt{64-100}}{2}=4\pm 3i=n\pm ki$　:　虚数解　すなわち　$n=4$　かつ　$k=3$

$y=e^{4x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$

ベクトルの幾何学的表示

ベクトル $\mathbf{A}$ ： 有向線分で表示（矢印）

ベクトル $\mathbf{A}$ の大きさ $|\mathbf{A}| = A$ ： 有向線分の長さ（矢印の長さ）

負のベクトル $-\mathbf{A}$ ： 逆向き有向線分で表示（逆向きの矢印）

ベクトルの和 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ： $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を二辺とする平行四辺形の対角線を長さとする有向線分

ベクトルの内積 ： $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$ （ただし θ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角）

ベクトルの外積の大きさ ： $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB\sin\theta$

すなわち外積 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ は、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を二辺とする平行四辺形の面積 $AB\sin\theta$ を長さとするベクトルであって、方向は平行四辺形の面に垂直かつ $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ へ廻した際に右ねじの進む向きと決める。

ベクトルの直交座標表示

ベクトル $\mathbf{A}$ の直交座標軸 x, y, z 方向のそれぞれの成分を A_x, A_y, A_z とすると

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z$$

ただし $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は それぞれ x, y, z 各座標軸の基本ベクトルである。

基本ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は、大きさ 1 のベクトルであって、直交座標系においては互いに直交する。

すなわち $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ の大きさ $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$

ベクトル $\mathbf{A}$ の大きさ $|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

基本ベクトルの演算規則

内積

$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$　　［注］ ドット記号「·」は内積を表す。

$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$

$\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0$

外積

$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$　　［注］ 積記号「×」は外積を表す。

$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$

$\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}$

ベクトルの内積と外積

二つのベクトルを $\mathbf{A}$ ならびに $\mathbf{B}$ とするとき、次のような内積と外積が定義される。

内積

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z)\cdot(\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z) \ = \ A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$　　［注］ベクトルの内積は交換法則が成り立つ。

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

外積

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z)\times(\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z) \\ &= \mathbf{i}\,(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{j}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{k}\,(A_xB_y - A_yB_x)\end{aligned}$$

$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$　　［注］ベクトルの外積は交換法則が成り立たない。

$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = \mathbf{B}\times\mathbf{B} = 0$　　［注］同一のベクトルの外積は零となる。

ベクトルの微分

ベクトル $\mathbf{A}$ や $\mathbf{B}$ がスカラーの変数 t の関数になっているとき、すなわち $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ ならびに $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ のとき

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j}\frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k}\frac{dA_z}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

ベクトルの積分

ベクトル $\mathbf{A}$ や $\mathbf{B}$ がスカラーの変数 t の関数になっているとき、すなわち $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ ならびに $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ のとき

$$\int \mathbf{A}\,dt = \mathbf{i}\int A_x\,dt + \mathbf{j}\int A_y\,dt + \mathbf{k}\int A_z\,dt$$

$$\int (\mathbf{A} \pm \mathbf{B})\,dt = \mathbf{i}\int (A_x \pm B_x)\,dt + \mathbf{j}\int (A_y \pm B_y)\,dt + \mathbf{k}\int (A_z \pm B_z)\,dt$$

ベクトルの応用例

位置ベクトル　$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$

変位ベクトル　$d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$

速度　$\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \;=\; \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z \;=\; \mathbf{i}\dfrac{dx}{dt} + \mathbf{j}\dfrac{dy}{dt} + \mathbf{k}\dfrac{dz}{dt}$　(ただし t は時間)

運動量　$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{i}p_x + \mathbf{j}p_y + \mathbf{k}p_z \;=\; \mathbf{i}mv_x + \mathbf{j}mv_y + \mathbf{k}mv_z$　(ただし m は質量)

加速度　$\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} \;=\; \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \;=\; \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z \;=\; \mathbf{i}\dfrac{dv_x}{dt} + \mathbf{j}\dfrac{dv_y}{dt} + \mathbf{k}\dfrac{dv_z}{dt} \;=\; \mathbf{i}\dfrac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j}\dfrac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{k}\dfrac{d^2z}{dt^2}$

力　$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z \;=\; \mathbf{i}ma_x + \mathbf{j}ma_y + \mathbf{k}ma_z$

仕事　$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \;=\; F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$

運動エネルギー　$K = \dfrac{1}{2m}\mathbf{p}^2 \;=\; \dfrac{1}{2}m\mathbf{v}^2 \;=\; \dfrac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) \;=\; \dfrac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$

力のモーメント　$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \;=\; \mathbf{i}\,(yF_z - zF_y) + \mathbf{j}\,(zF_x - xF_z) + \mathbf{k}\,(xF_y - yF_x)$

角運動量　$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \;=\; \mathbf{i}\,(yp_z - zp_y) + \mathbf{j}\,(zp_x - xp_z) + \mathbf{k}\,(xp_y - yp_x)$

ベクトル場

ベクトル $\mathbf{A}$ が空間座標 x, y, z の関数になっているとき、すなわち $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ のときベクトル場と呼ばれる。

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{i}A_x(x, y, z) + \mathbf{j}A_y(x, y, z) + \mathbf{k}A_z(x, y, z)$$

ただし $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は それぞれ x, y, z 各座標軸の基本ベクトルである。

［注］スカラー ϕ が空間座標 x, y, z の関数になっているとき、すなわち $\phi = \phi(x, y, z)$ のときはスカラー場と呼ばれる。

勾配

スカラー場 $\phi = \phi(x, y, z)$ とするとき、各点における勾配を表すベクトル $\mathrm{grad}\,\phi$ が次式のように定義される。

$$\mathrm{grad}\,\phi = \mathbf{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (\mathrm{grad}\ \text{の呼称 ： グラジエント})$$

ベクトル微分演算子　$\nabla = \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$　とするとき　$\mathrm{grad}\,\phi = \nabla\phi$　　(∇ の呼称 ： ナブラ)

発散

ベクトル場 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ とするとき、発散を表すスカラー $\mathrm{div}\,\mathbf{A}$ が次式のように定義される。

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (\mathrm{div}\ \text{の呼称 ： ダイバージェンス})$$

$\nabla = \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$　を用いると　$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$

回転

ベクトル場 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ とするとき、回転を表すベクトル $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ が次式のように定義される。

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \qquad (\mathrm{rot}\ \text{の呼称 ： ローテーション})$$

$\nabla = \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$　を用いると　$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$

勾配の発散

スカラー場 $\phi = \phi(x, y, z)$ とするとき、各点における勾配の発散を表すスカラー $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi$ は次式のように記せる。

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$\nabla = \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$　を用いると　$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi = \nabla \cdot \nabla\phi \;=\; \nabla^2\phi$

［注］ナブラの二乗 ∇^2 を Δ で記すこともある。（Δ の呼称はラプラシアン）

回転の回転

ベクトル場 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z)$ とするとき、回転の回転を表すベクトル $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ は次式のように記せる。

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \;=\; -\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\mathbf{A} + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} \;=\; -\nabla^2\mathbf{A} + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} \;=\; -\nabla^2\mathbf{A} + \nabla\,(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

勾配の回転

スカラー場 $\phi = \phi(x,y,z)$ とするとき、勾配の回転を表すベクトル $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi$ は常に零ベクトル $\mathbf{0}$ となる。

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0} \qquad (\text{ただし}\ \ \mathbf{0} = \mathbf{i}\,0 + \mathbf{j}\,0 + \mathbf{k}\,0)$$

回転の発散

ベクトル場 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,y,z)$ とするとき、回転の発散を表すスカラー $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ は常に零となる。

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

公式

$$\mathrm{div}(\phi\mathbf{A}) = (\mathrm{grad}\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi\,(\mathrm{div}\mathbf{A})$$
$$\mathrm{rot}(\phi\mathbf{A}) = (\mathrm{grad}\phi) \times \mathbf{A} + \phi\,(\mathrm{rot}\mathbf{A})$$

ベクトル場の応用例

重力のポテンシャルエネルギー $U = U(x,y,z)$ とするとき、重力場 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,z)$ は

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}\,U$$

電荷密度 $\rho = \rho(x,y,z,t)$ とし、電流密度 $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x,y,z)$ とするとき、電荷の保存法則は

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad (\text{ただし}\ t\ \text{は時間})$$

電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x,y,z)$ とし、電荷密度 $\rho = \rho(x,y,z)$ とするとき、ガウスの法則は

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad (\text{ただし}\ \pi\ \text{は円周率})$$

電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x,y,z,t)$ とし、磁束密度 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x,y,z,t)$ とするとき、ファラデーの法則は

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad (\text{ただし}\ t\ \text{は時間})$$

行列 matrix

$m \times n$ 個の数 a_{ij} (ただし $i = 1,\ 2,\ \cdots, m$ かつ $j = 1,\ 2,\ \cdots, n$) の全体を A で表し、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のように a_{ij} を配列したものを、m 行 n 列の行列 あるいは (m, n) 行列という。

ここで 数 a_{ij} を行列 A の成分といい、横に並んだ数を行、縦に並んだ数を列という。

[例] 3 行 4 列の行列 あるいは $(3, 4)$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

正方行列

行数と列数が等しい行列、すなわち (n, n) 行列を n 次の正方行列という。

[例] $(3, 3)$ 行列すなわち 3 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

正方行列 A において、左上から右下に至る対角線上の成分を A の対角成分という。

行ベクトルならびに列ベクトル

一つの行だけからなる行列、すなわち $(1, n)$ 行列を n 次の行ベクトルという。

[例] $(1, 3)$ 行列すなわち 3 次の行ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

一つの列だけからなる行列、すなわち $(m, 1)$ 行列を m 次の列ベクトルという。

[例] $(3, 1)$ 行列すなわち 3 次の列ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

一行一列だけからなる行列 すなわち $(1, 1)$ 行列はスカラーに帰着する。スカラーは単なる数である。

行列の相等

行列 A と行列 B がともに同じ (m, n) 行列で、しかも それらの (i, j) 成分 a_{ij} と b_{ij} がすべて互いに等しいとき、A と B は等しい。すなわち $A = B$ は $a_{ij} = b_{ij}$ となることである。

行列の加法

行列 A と行列 B がともに同じ (m, n) 行列のときに定義され、$a_{ij} + b_{ij}$ を成分とする (m, n) 行列を A と B の和といい、$A + B$ で表わす。

[例] $(2, 2)$ 行列の和

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

スカラーと $(3,3)$ 行列の積

$$s\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \\ sa_{31} & sa_{32} & sa_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{ただし}\ \ s\ \text{はスカラー}$$

3 次の行ベクトルと 3 次の列ベクトルの積

$$(a_1 \ \ a_2 \ \ a_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

すなわち 3 次の行ベクトルと 3 次の列ベクトルの積はスカラーとなる。

3 次の行ベクトルと $(3,3)$ 行列の積

$$(a_1 \ \ a_2 \ \ a_3)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = (a_1b_{11} + a_2b_{21} + a_3b_{31} \quad a_1b_{12} + a_2b_{22} + a_3b_{32} \quad a_1b_{13} + a_2b_{23} + a_3b_{33})$$

すなわち 3 次の行ベクトルと $(3,3)$ 行列の積は 3 次の行ベクトルとなる。

$(3,3)$ 行列と 3 次の列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 \end{pmatrix}$$

すなわち $(3,3)$ 行列と 3 次の列ベクトルの積は 3 次の列ベクトルとなる。

$(3,3)$ 行列と $(3,3)$ 行列の積

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

すなわち $(3,3)$ 行列と 3 次の $(3,3)$ 行列の積は $(3,3)$ 行列となる。

［注］一般に行列の積については交換法則が成り立つとは限らない。

転置行列

行列 A において、行と列を入れ換えた行列のことを、A の転置行列といい、${}^tA$ と記す。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

［注］列ベクトルの転置行列は行ベクトルとなり、行ベクトルの転置行列は列ベクトルとなる。

対称行列

$A = {}^tA$ が成り立つような行列 A のことを対称行列という。

［例］ $(2,2)$ 対称行列ならびに $(3,3)$ 対称行列

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

対角行列

対角成分以外の要素が、すべて零であるような行列のこと対角行列をいう。

[例] $(2,2)$ 対角行列ならびに $(3,3)$ 対角行列

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

［注］対角行列の積については、交換法則が成り立つ。

行列式 determinant

n 次の正方行列 A について、その $n \times n$ 個の数 a_{ij} (ただし $i = 1,\ 2,\ \cdots, n$ かつ $j = 1,\ 2,\ \cdots, n$) とするとき、次のように n 次の行列式 $|A|$ が定義される。

1 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

2 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

4 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}\left(a_{22}a_{33}a_{44} + a_{32}a_{43}a_{24} + a_{23}a_{34}a_{42} - a_{24}a_{33}a_{42} - a_{23}a_{32}a_{44} - a_{34}a_{43}a_{22}\right) \\
&\quad -a_{12}\left(a_{21}a_{33}a_{44} + a_{31}a_{43}a_{24} + a_{23}a_{34}a_{41} - a_{24}a_{33}a_{41} - a_{23}a_{31}a_{44} - a_{34}a_{43}a_{21}\right) \\
&\quad +a_{13}\left(a_{21}a_{32}a_{44} + a_{31}a_{42}a_{24} + a_{22}a_{34}a_{41} - a_{24}a_{32}a_{41} - a_{22}a_{31}a_{44} - a_{34}a_{42}a_{21}\right) \\
&\quad -a_{14}\left(a_{21}a_{32}a_{43} + a_{31}a_{42}a_{23} + a_{22}a_{33}a_{41} - a_{23}a_{32}a_{41} - a_{22}a_{31}a_{43} - a_{33}a_{42}a_{21}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{32}a_{43}a_{24} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{34}a_{43}a_{22} \\
&\quad -a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{31}a_{43}a_{24} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{34}a_{43}a_{21} \\
&\quad +a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{31}a_{42}a_{24} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{34}a_{42}a_{21} \\
&\quad -a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{31}a_{42}a_{23} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{33}a_{42}a_{21}
\end{aligned}$$

[例] 3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 4 \times 8 + 6 \times 0 \times 3 + 7 \times 5 \times 1 - 3 \times 4 \times 7 - 1 \times 0 \times 2 - 8 \times 6 \times 5 = -225$$

行列式の一般的定義

n 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して、その n^2 個の成分 a_{ij} から作られる

$$\sum_{i,j,\cdots,k\ =1}^{n} \epsilon_{ij\ldots k}\ a_{1i}\ a_{2j}\ \ldots\ldots\ a_{nk}$$

なる式を n 次の行列式 $|A|$ という。（ただし $\epsilon_{ij\ldots k}$ の添え字の番号 $i,\ j,\ \cdots,\ k$ の個数は n ）

ここで

$\epsilon_{ij\cdots k} = 1, \quad (i,\ j,\ \cdots,\ k$ が偶順列のとき$)$

$\epsilon_{ij\cdots k} = -1, \quad (i,\ j,\ \cdots,\ k$ が奇順列のとき$)$

$\epsilon_{ij\cdots k} = 0, \quad (i,\ j,\ \cdots,\ k$ の中に同じ数があるとき$)$

例えば

2 次のとき　$\epsilon_{12} = 1, \quad \epsilon_{21} = -1, \quad \epsilon_{11} = 0, \quad \epsilon_{22} = 0$

3 次のとき　$\epsilon_{123} = 1, \quad \epsilon_{321} = -1, \quad \epsilon_{231} = 1, \quad \epsilon_{111} = 0,$

$\epsilon_{112} = 0, \quad \epsilon_{122} = 0, \quad \epsilon_{222} = 0, \quad \cdots\cdots$

一般に n 次の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

のように記す。

［例］ 2 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{i,j=1}^{2} \epsilon_{ij}\ a_{\mathbf{1}i}\ a_{\mathbf{2}j} \ = \ \epsilon_{12}\ a_{\mathbf{1}1}a_{\mathbf{2}2} + \epsilon_{21}\ a_{\mathbf{1}2}a_{\mathbf{2}1} \ = \ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

［例］ 3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\ a_{\mathbf{1}i}\ a_{\mathbf{2}j}\ a_{\mathbf{3}k}$$

$$\begin{aligned} &= \epsilon_{123}\ a_{\mathbf{1}1}a_{\mathbf{2}2}a_{\mathbf{3}3} + \epsilon_{132}\ a_{\mathbf{1}1}a_{\mathbf{2}3}a_{\mathbf{3}2} + \epsilon_{213}\ a_{\mathbf{1}2}a_{\mathbf{2}1}a_{\mathbf{3}3} \\ &\quad + \epsilon_{231}\ a_{\mathbf{1}2}a_{\mathbf{2}3}a_{\mathbf{3}1} + \epsilon_{312}\ a_{\mathbf{1}3}a_{\mathbf{2}1}a_{\mathbf{3}2} + \epsilon_{321}\ a_{\mathbf{1}3}a_{\mathbf{2}2}a_{\mathbf{3}1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$