

行列 matrix

1 行列

行列 matrix

$m \times n$ 個の数 a_{ij} (ただし $i = 1, 2, \dots, m$ かつ $j = 1, 2, \dots, n$) の全体を A で表し、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のように a_{ij} を配列したものを、 m 行 n 列の行列 あるいは (m, n) 行列という。

ここで数 a_{ij} を行列 A の成分 (component) といい、横に並んだ数を行 (row)、縦に並んだ数を列 (column) という。

すなわち A の第 i 行は、 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}$ であり、

A の第 j 列は、

$$\begin{array}{c} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array}$$

である。

また a_{ij} を A の (i, j) 成分という。

[例] 3 行 4 列の行列 あるいは $(3, 4)$ 行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

正方行列 square matrix

行数と列数が等しい行列、すなわち (n, n) 行列を n 次の正方行列という。

[例] $(3, 3)$ 行列すなわち 3 次の正方行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

行ベクトル row vector

一つの行だけからなる行列、すなわち $(1, n)$ 行列を n 次の行ベクトルという。

すなわち n 次の行ベクトルは $(a_1 \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_n)$ となる。

[例] $(1, 3)$ 行列すなわち 3 次の行ベクトル

$$(a_1 \ a_2 \ a_3)$$

列ベクトル column vector

一つの列だけからなる行列、すなわち $(m, 1)$ 行列を m 次の列ベクトルという。

すなわち m 次の列ベクトルは

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

となる。

[例] (3, 1) 行列すなわち 3 次の列ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

スカラー scalar

一行一列だけからなる行列 すなわち (1, 1) 行列をスカラーといい、いわゆる単なる数 a はスカラーの例である。

行列の相等

行列 A と行列 B がともに同じ (m, n) 行列で、しかも それらの (i, j) 成分 a_{ij} と b_{ij} がすべて互いに等しいとき、 A と B は等しいといい、 $A = B$ と記す。

すなわち $A = B$ は $a_{ij} = b_{ij}$ となることである。(ただし $i = 1, 2, \dots, m$ かつ $j = 1, 2, \dots, n$)

行列の演算

(1) 加法 addition

行列 A と行列 B がともに同じ (m, n) 行列のときに定義され、 $a_{ij} + b_{ij}$ を成分とする (m, n) 行列 C を A と B の和といい、 $A + B$ で表わす。

すなわち

$$C = A + B$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2j} + b_{2j} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{ij} + b_{ij} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mj} + b_{mj} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

[例] (3, 4) 行列の加法

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & -5 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \\ -9 & -4 & 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 10 & -3 \\ 10 & 15 & 11 & 6 \\ -8 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) スカラーと行列の積

行列 A のすべての成分にスカラー p をかけて得られる行列 $C = pA$ を A の p 倍という。

すなわち

$$C = pA = \begin{pmatrix} pa_{11} & pa_{12} & \cdots & pa_{1j} & \cdots & pa_{1n} \\ pa_{21} & pa_{22} & \cdots & pa_{2j} & \cdots & pa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ pa_{m1} & pa_{m2} & \cdots & pa_{mj} & \cdots & pa_{mn} \end{pmatrix}$$

(3) 行列の差 $A - B$

$A - B = A + (-1)B$ で定義される。

(4) n 次行ベクトルと n 次列ベクトルの積

$$(a_1 \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_n$$

すなわち 行ベクトルと列ベクトルの積はスカラー—いわゆる $(1, 1)$ 行列となる。

[例] 3 次行ベクトルと 3 次列ベクトルの積

$$(3 \ -5 \ 8) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 3 \times 2 + (-5) \times 6 + 8 \times 7 = 32$$

(5) n 次列ベクトルと n 次行ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_n) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & b_1 a_3 & \cdots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & b_2 a_3 & \cdots & b_2 a_n \\ b_3 a_1 & b_3 a_2 & b_3 a_3 & \cdots & b_3 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & b_n a_3 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix}$$

すなわち 列ベクトルと行ベクトルの積は n 次正方形行列—いわゆる (n, n) 行列となる。

一般に行列の積は、交換則が成り立つとは限らない。

[例] 3 次列ベクトルと 3 次行ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} (3 \ -5 \ 8) = \begin{pmatrix} 2 \times 3 & 2 \times (-5) & 2 \times 8 \\ 6 \times 3 & 6 \times (-5) & 6 \times 8 \\ 7 \times 3 & 7 \times (-5) & 7 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 16 \\ 18 & -30 & 48 \\ 21 & -35 & 56 \end{pmatrix}$$

(6) m 次行ベクトルと (m, n) 行列の積

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ = (a_1 b_{11} + a_2 b_{21} + \cdots + a_m b_{m1} \quad a_1 b_{12} + a_2 b_{22} + \cdots + a_m b_{m2} \quad \cdots \cdots \quad a_1 b_{1n} + a_2 b_{2n} + \cdots + a_m b_{mn})$$

すなわち m 次行ベクトルと (m, n) 行列の積は n 次行ベクトルとなる。

[例] 3 次行ベクトルと $(3, 4)$ 行列の積

$$(3 \ -5 \ 8) \begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & -5 & -8 \end{pmatrix} \\ = (3 \times 5 + (-5) \times 8 + 8 \times 1 \quad 3 \times (-3) + (-5) \times 10 + 8 \times 9 \quad 3 \times 7 + (-5) \times 4 + 8 \times (-5) \quad 3 \times 2 + (-5) \times 6 + 8 \times (-8)) \\ = (-17 \ 13 \ -39 \ -88)$$

(7) (m, n) 行列と n 次の列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{pmatrix}$$

すなわち (m, n) 行列と n 次の列ベクトルの積は m 次の列ベクトルとなる。

[例] (3, 4) 行列と 3 次の列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & -5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 2 + (-3) \times 6 + 7 \times 7 + 2 \times 3 \\ 8 \times 2 + 10 \times 6 + 4 \times 7 + 6 \times 3 \\ 1 \times 2 + 9 \times 6 + (-5) \times 7 + (-8) \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 \\ 122 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(8) (m, k) 行列と (k, n) 行列の積

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1k}b_{k1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1k}b_{k2} & \cdots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2k}b_{k1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2k}b_{k2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mk}b_{k1} & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \cdots + a_{mk}b_{k2} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1k}b_{kn} \\ a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2k}b_{kn} \\ \cdots \\ a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \cdots + a_{mk}b_{kn} \end{pmatrix}$$

すなわち (m, k) 行列と (k, n) 行列の積は (m, n) 行列となる。

[例] (3, 4) 行列と (4, 2) 行列の積

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & -5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \\ 4 & 8 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 3 + (-3) \times 6 + 7 \times 4 + 2 \times 2 & 5 \times 5 + (-3) \times 1 + 7 \times 8 + 2 \times 7 \\ 8 \times 3 + 10 \times 6 + 4 \times 4 + 6 \times 2 & 8 \times 5 + 10 \times 1 + 4 \times 8 + 6 \times 7 \\ 1 \times 3 + 9 \times 6 + (-5) \times 4 + (-8) \times 2 & 1 \times 5 + 9 \times 1 + (-5) \times 8 + (-8) \times 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 29 & 92 \\ 112 & 124 \\ 21 & -82 \end{pmatrix}$$

行列のべき (累乗) power

A が正方行列すなわち (n, n) 行列のとき、 k 個の A の積を A^k と記し、これを A の累乗という。

[例] (2, 2) 行列の二乗

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 5 + 3 \times 8 & 5 \times 3 + 3 \times 1 \\ 8 \times 5 + 1 \times 8 & 8 \times 3 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 18 \\ 48 & 25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

転置行列 **transposed matrix**

行列 A において、行と列を入れ換えた行列のことを、 A の転置行列といい、 tA と記す。すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のとき

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

である。

なお 列ベクトルの転置行列は行ベクトルとなり、行ベクトルの転置行列は列ベクトルとなる

対称行列 **symmetric matrix**

$A = {}^tA$ が成り立つような行列 A のことをいう。

[例] 対称行列

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

行列の対角成分 **diagonal element**

正方行列 A において、左上から右下に至る対角線上の成分 a_{ii} を A の対角成分という。

例えば

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \text{ の対角成分は、} a, b$$
$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \text{ の対角成分は、} a, b, c \text{ である。}$$

対角行列 **diagonal matrix**

対角成分以外の要素が、すべて零であるような行列のことをいう。

対角行列に関しては $A = {}^tA$ が成り立つ。

[例] 対角行列

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

零行列

すべての成分が零であるような行列のことをいい、 O で表わす。

すなわち $a_{ij} = 0$ である。

任意の行列 A と零行列 O がともに (m, n) 行列であるとき、

$$A + O = A$$

$$A - A = O$$

が成り立つ。

[例] 零行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

単位行列 unit matrix

正方行列において、対角成分がすべて 1 で他の成分がすべて零である行列のことをいい、 E で表わす。

すなわち $a_{ij} = \delta_{ij}$ である。

ただし δ_{ij} は Kronecker (クロネッカー) 記号であって

$$i = j \text{ のとき } \delta_{ij} = 1$$

$$i \neq j \text{ のとき } \delta_{ij} = 0$$

を示す。(ただし $i = 1, 2, \dots, m$ かつ $j = 1, 2, \dots, n$)

任意の (m, n) 行列を A とし、 (m, m) 単位行列を E_m ならびに (n, n) 単位行列を E_n とするとき、

$$AE_n = A$$

$$E_m A = A$$

が成り立つ。

[例] 単位行列

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \text{ とするとき、}$$

$$AE_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$E_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

2 行列の演算法則

演算法則

(1) 加法

$$A + B = B + A \quad (\text{交換法則})$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (\text{結合法則})$$

(2) スカラー倍 (ただし p, q はスカラー)

$$(p + q)A = pA + qA \quad (\text{分配法則})$$

$$p(A + B) = pA + pB \quad (\text{分配法則})$$

$$(pq)A = p(qA) \quad (\text{結合法則})$$

(3) 積

$$(AB)C = A(BC) \quad (\text{結合法則})$$

$$A(B + C) = AB + AC \quad (\text{分配法則})$$

$$(A + B)C = AC + BC \quad (\text{分配法則})$$

$$p(AB) = (pA)B = A(pB) \quad (\text{結合法則})$$

転置行列の性質

$$(1) \quad {}^t({}^tA) = A$$

$$(2) \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$

$$(3) \quad {}^t(pA) = p \, {}^tA$$

$$(4) \quad {}^t(AB) = {}^tB \, {}^tA$$

【例題 1】 同じ次数の正方行列 A, B があるとき、つぎの式を展開せよ。

$$(1) \quad (A - B)^2$$

$$(2) \quad (A - B)^3$$

(解)

$$\begin{aligned} (1) \quad (A - B)^2 &= (A - B)(A - B) \\ &= AA - AB - BA + BB \\ &= A^2 - AB - BA + B^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (A - B)^3 &= (A - B)(A^2 - AB - BA + B^2) \\ &= A^3 - A^2B - ABA + AB^2 - BA^2 + BAB + B^2A - B^3 \end{aligned}$$

正則行列 regular matrix

n 次の正方行列 A に対して、 $AX = E$ かつ $XA = E$ を同時に満たす正方行列 X が存在するとき、 X を A の逆行列といい、 A^{-1} と記す。

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

A に逆行列が存在するとき、 A は正則 (regular) であるという。

正則行列の性質

A, B ともに n 次の正則行列とすれば、

$$(1) \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(2) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(3) \quad ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

$$(4) \quad (pA)^{-1} = p^{-1}A^{-1} \quad (\text{ただし } p \text{ はスカラー かつ } p \neq 0)$$

対角行列の逆行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

【例題 2】 2 次の正則行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(解)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \quad AA^{-1} = E \quad \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{であるから}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1$$

$$a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0$$

$$a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0$$

$$a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1$$

上記の4元連立方程式を解いて、未知数 x_{11} , x_{12} , x_{21} , x_{22} を求めると A^{-1} の各成分は次のようになる。

$$x_{11} = \frac{a_{22}}{D}$$

$$x_{12} = \frac{-a_{12}}{D}$$

$$x_{21} = \frac{-a_{21}}{D}$$

$$x_{22} = \frac{a_{11}}{D}$$

(ただし $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$)