確率　probability

1　順列と組み合わせ

順列

一般に対象を並べる操作のことを順列という。順列の例としてアルファベット文字を並べる際の順列の数について考える。

対象	対象の並べ方　(括弧の中)	順列の数
a	(a)	$1 = 1!$
a，b	(ab)，(ba)	$2 = 2 \times 1 = 2!$
a，b，c	(abc)，(cab)，(bca)，(acb)，(cba)，(bac)	$6 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$
a，b，c，d	(abcd)，$\cdots$　$\cdots$　$\cdots$　$\cdots$，　(dcba)	$24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$

一般に n 個の異なる対象すべてを並べる際の並べ方の数すなわち順列の数 ${}_nP_n$ は、次式によって与えられる。

$${}_nP_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ \cdots\ 3 \times 2 \times 1$$

対象が一つも無い場合 $(n = 0)$ の順列の数は、対象が一つも無い状態がただ一つ存在することになるので、これは

$${}_0P_0 = 0! = 1$$

を意味する。

［例］ ${}_5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

n 個の対象の中、p 個の同一対象，q 個の他の同一対象，さらに r 個の他の同一対象，$\cdots$ などがあるとき、これら n 個の対象すべてを並べるときの順列の数は次式によって与えられる。

$$\frac{n!}{p!\ q!\ r!\ \cdots}$$

ただし $p + q + r + \cdots = n$ である。

次に n 個の対象の中から任意の r 個を取り出して、それらを並べる際の並べ方の数について考える。

例としてアルファベット文字を取り出して並べる際の順列の数について下表に示す。

n 個の対象	取り出す数 r	取り出した対象の並べ方　(括弧の中)	順列
a，b	1	(a)，(b)	$2 = \frac{2!}{(2-1)!}$
a，b	2	(ab)，(ba)	$2 = \frac{2!}{(2-2)!}$
a，b，c	1	(a)，(b)，(c)	$3 = \frac{3!}{(3-1)!}$
a，b，c	2	(ab)，(ba)，(bc)，(cb)，(ac)，(ca)	$6 = \frac{3!}{(3-2)!}$
a，b，c	3	(abc)，(cab)，(bca)，(acb)，(cba)，(bac)	$6 = \frac{3!}{(3-3)!}$
a，b，c，d	1	(a)，(b)，(c)，(d)	$4 = \frac{4!}{(4-1)!}$
a，b，c，d	2	(ab)，(ba)，(ac)，(ca)，(ad)，(da)， (bc)，(cb)，(bd)，(db)，(cd)，(dc)	$12 = \frac{4!}{(4-2)!}$

一般に n 個の異なる対象の中から任意の r 個を取り出して、それらを並べる際の順列の数 ${}_nP_r$ は、次式によって与えられる。

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

［例］

$${}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$$

重複順列

異なる n 個の対象から同じ対象を繰り返し使うことを許して r 個取り出して並べるときの順列のことを重複順列という。
重複順列の例としてアルファベット文字の並べ方の数について考える。

n 個の対象	取り出す数 r	対象の並べ方　(括弧の中)	重複順列の数
a	1	(a)	$1=1^1$
a	2	(aa)	$1=1^2$
a	3	(aaa)	$1=1^3$
a，b	1	(a)，(b)	$2=2^1$
a，b	2	(aa)，(ab)，(ba)，(bb)	$4=2^2$
a，b	3	(aaa)，(aab)，(aba)，(abb) (baa)，(bab)，(bba)，(bbb)	$8=2^3$
a，b，c	1	(a)，(b)，(c)	$3=3^1$
a，b，c	2	(aa)，(ab)，(ac)，(ba)，(bb) (bc)，(ca)，(cb)，(cc)	$9=3^2$

一般に n 個の対象の中から任意の r 個を取り出して、それらを並べる際の重複順列の数は n^r となる。

［例］ 5 個の対象の中から任意の 3 個を取り出して、それらを並べる際の重複順列の数は $5^3=125$

組み合わせ

n 個の対象の中から、r 個の対象を取り出す際の取り出し方の数を組み合わせという。組み合わせは順列とは異なり、取り出した対象の並べ方については考慮しない。例としてアルファベット文字を取り出す際の取り出し方の数 すなわち 組み合わせを下表に示す。

n 個の対象	取り出す数 r	取り出し方　(括弧の中)	組み合わせ
a，b	1	(a)，(b)	$2=\frac{2!}{1!\ (2-1)!}$
a，b	2	(a,b)	$2=\frac{2!}{2!\ (2-2)!}$
a，b，c	1	(a)，(b)，(c)	$3=\frac{3!}{1!\ (3-1)!}$
a，b，c	2	(a,b)，(b,c)，(a,c)	$3=\frac{3!}{2!\ (3-2)!}$
a，b，c	3	(a,b,c)	$1=\frac{3!}{3!\ (3-3)!}$
a，b，c，d	1	(a)，(b)，(c)，(d)	$4=\frac{4!}{1!\ (4-1)!}$
a，b，c，d	2	(a,b)，(a,c)，(a,d)，(b,c)，(b,d)，(c,d)	$6=\frac{4!}{2!\ (4-2)!}$
a，b，c，d	3	(a,b,c)，(b,c,d)，(a,c,d)，(a,b,d)	$4=\frac{4!}{3!\ (4-3)!}$
a，b，c，d	4	(a,b,c,d)	$1=\frac{4!}{4!\ (4-4)!}$

一般に n 個の対象の中から r 個の対象を取り出す際の取り出し方の数 すなわち 組み合わせ ${}_nC_r$ は、次式によって与えられる。

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!\ (n-r)!} $$

［例］

$$ {}_5C_3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\ 2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1} = 10 $$

場合の数

ある状態が起こり得るとき、起こり得るすべての状態の個数を場合の数という。

［和の法則］

二つの起こり得る状態 A, B があるとき、A の起こる場合が m 通り、B の起こり得る場合が n 通りあり、かつ これらは同時には起こりえないとするとき、A または B の起こり得る場合の数は $m + n$ 通りである。

［積の法則］

二つの起こり得る状態 A, B があるとき、A の起こる場合が m 通り、B の起こり得る場合が n 通りあり、かつ これらが同時に起こるとするとき、A と B 双方の起こり得る場合の数は $m \times n$ 通りである。

2　事象

事象

起こり得る状態の集合のことを事象という。換言すれば、事象とは起こり得る状態を要素とする集合のことである。
これに対して、起こり得る状態の全体集合を全事象という。

［例］

(1) アルファベットの a, b を並べるとき、a が左から 1 番目に来る状態を要素とする集合すなわち事象は $\{\ (ab)\ \}$ となる。
ただし 起こり得る状態の全体集合すなわち全事象は $\{\ (ab)\ \ (ba)\ \}$ である。

(2) アルファベットの a, b, c を並べるとき、a が左から 1 番目に来る状態を要素とする集合すなわち事象は
$\{\ (abc)\ \ (acb)\ \}$ となる。
ただし 起こり得る状態の全体集合すなわち全事象は $\{\ (abc)\ \ (acb)\ \ (bac)\ \ (cab)\ \ (bca)\ \ (cba)\ \}$ である。

(3) アルファベットの a, b, c を並べるとき、すべてがアルファベット順に並ぶ状態を要素とする集合すなわち事象は
$\{\ (abc)\ \}$ となる。
ただし 起こり得る状態の全体集合すなわち全事象は $\{\ (abc)\ \ (acb)\ \ (bac)\ \ (cab)\ \ (bca)\ \ (cba)\ \}$ である。

(4) アルファベットの a, b, c の中から二文字を取り出して並べるとき、a が左から 1 番目に来る状態を要素とする
集合すなわち事象は $\{\ (ab)\ \ (ac)\ \}$ となる。
ただし 起こり得る状態の全体集合すなわち全事象は $\{\ (ab)\ \ (ac)\ \ (ba)\ \ (ca)\ \ (bc)\ \ (cb)\ \}$ である。

(5) アルファベットの a, b, c の中から二文字を取り出す際の組み合わせの中、a を含む状態を要素とする集合
すなわち事象は $\{\ (a, b)\ \ (a, c)\ \}$ となる。
ただし 起こり得る状態の全体集合すなわち全事象は $\{\ (a, b)\ \ (a, c)\ \ (b, c)\ \}$ である。

余事象

事象を集合 A とし、全事象を全体集合 S で表すと、集合 A は全体集合 S に含まれる。そこで 事象 A が起こらない状態の集合を余事象と呼び、A' で表す。すなわち A' は全事象 S 内の要素 (状態) の中、A に含まれない要素の集合となる。

［例］

(1) アルファベットの a, b を並べるとき、a が左端から 1 番目に来る状態を要素とする事象 $A = \{\ (ab)\ \}$ に対する
余事象 A' は $\{\ (ba)\ \}$ となる。
ただし 起こり得る状態の全体集合すなわち全事象 S は $\{\ (ab)\ \ (ba)\ \}$ である。

(2) アルファベットの a, b, c を並べるとき、a が左から 1 番目に来る状態を要素とする事象 $A = \{\ (abc)\ \ (acb)\ \}$
に対する余事象 A' は $\{\ (bac)\ \ (cab)\ \ (bca)\ \ (cba)\ \}$ となる。
ただし 起こり得る状態の全体集合すなわち全事象 S は $\{\ (abc)\ \ (acb)\ \ (bac)\ \ (cab)\ \ (bca)\ \ (cba)\ \}$ である。

空事象

起こり得る状態を一つも含まない事象を空事象と呼び、記号 $\emptyset$ で表す。
換言すれば空事象とは、空集合のことであって $\emptyset = \{\ \ \}$ を意味する。

単一事象

起こり得る状態を一つだけ含む事象を単一事象という。
換言すれば単一事象とは、ただ一つの要素のみを持つ集合のことである。

［例］

アルファベットの a, b, c から二文字を取り出す際の組み合わせの起こり得る状態の全体集合 S すなわち全事象は $\{\ (a, b)\ \ (b, c)\ \ (a, c)\ \}$ であるが、単一事象は、それぞれ $\{\ (a, b)\ \}$, $\{\ (b, c)\ \}$, $\{\ (a, c)\ \}$ となる。

排反

事象 A と事象 B が互いに同一の起こり得る状態を含まないとき、事象 A と事象 B は排反であるという。
換言すれば、排反とは事象 A と事象 B が共通の要素を持たないということである。

［例］

アルファベットの a, b, c 並べるとき、a が左から 1 番目に来る状態を要素とする集合すなわち事象 A は
$A = \{\ (abc)\ \ \ (acb)\ \}$ となり、b が左から 1 番目に来る状態を要素とする集合すなわち事象 B は
$B = \{\ (bca)\ \ \ (bac)\ \}$ となる。
したがって 事象 A と事象 B は、同一の並べ方の状態を含まず、互いに共通要素を持たないので排反である。

事象の演算法則

事象は集合とみなせるので、次のような集合の演算法則が適用できる。A, B, C を事象とし、S を全事象 (全体集合) とする。

集合の和 (合併) についての法則

$A \cup A = A$
$A \cup S = S$
$A \cup A' = S$
$A \cup B = B \cup A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

集合の積 (共通部分) についての法則

$A \cap A = A$
$A \cap S = A$
$A \cap A' = \phi$
$A \cap B = B \cap A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配法則

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3　確率分布

確率

起こり得る全ての状態を含む全体集合 (全事象 S) において、それぞれの状態 (各要素) が均等に起こり得るものとすると、その中で起こり得る状態の集合 (事象 A) に対する確率 $P(A)$ が、次式のように定義される。

$$P(A) = \frac{(\text{起こり得る状態の個数})}{(\text{起こり得る全ての状態の個数})} = \frac{(\text{事象 } A \text{ の要素の個数})}{(\text{全事象 } S \text{ の要素の個数})}$$

一般に事象 A に対する確率を $P(A)$ のように記す。確率とは、ある事象 A が起こる確からしさの指標である。
ここで $P(S)$ についての確率の値は、

$$P(S) = \frac{\text{全事象 } S \text{ の要素の個数}}{\text{全事象 } S \text{ の要素の個数}} = 1$$

となる。

全事象 S は起こり得る状態すべてを要素として持つ全体集合であるから、それに対する確率 $P(S)=1$ となるわけである。
このことは全事象 S の中の要素は、必ずいずれかは起こる状態であることを意味している。
一般に確率は 0 と 1 の間の数値で与えられる。すなわち $0 \leq P(A) \leq 1$ である。

［例］

(1) アルファベットの a, b を並べるとき、a が左から 1 番目に来る状態を要素とする集合 (事象) に対する確率 $P(A)$ を求める。

事象 $A=\{\ (ab)\ \}$ より、A の要素の個数は 1
全事象 $S=\{\ (ab)\ \ (ba)\ \}$ より、S の要素の個数は 2

よって $P(A)=\dfrac{(\text{事象 } A \text{ の要素の個数})}{(\text{全事象 } S \text{ の要素の個数})}=\dfrac{1}{2}=0.5$

なお a が左から 2 番目に来る事象の確率についても同様にして

$$P(A)=\frac{1}{2}=0.5$$

となる。

(2) アルファベットの a, b, c を並べるとき、a が左から 1 番目に来る状態を要素とする集合 (事象) に対する確率 $P(A)$ を求める。

事象 $A=\{\ (abc)\ \ (acb)\ \}$ より、A の要素の個数は 2
全事象 $S=\{\ (abc)\ \ (acb)\ \ (bac)\ \ (cab)\ \ (bca)\ \ (cba)\ \}$ より、
S の要素の個数は 6

よって $P(A)=\dfrac{(\text{事象 } A \text{ の要素の個数})}{(\text{全事象 } S \text{ の要素の個数})}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

なお a が左から 2 番目または 3 番目に来る事象の確率についても同様にして

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

となる。

(3) アルファベットの a, b, c を並べるとき、すべてがアルファベット順に並ぶ状態を要素とする集合 (事象 A) に対する確率 $P(A)$ を求める。

事象 $A=\{\ (abc)\ \}$ より、A の要素の個数は 1
全事象 $S=\{\ (abc)\ \ (cba)\ \ (cab)\ \ (bca)\ \ (acb)\ \ (bac)\ \}$ より、
S の要素の個数は 6

よって $P(A)=\dfrac{(\text{事象 } A \text{ の要素の個数})}{(\text{全事象 } S \text{ の要素の個数})}=\dfrac{1}{6}$

なお すべてがアルファベットの逆順に並ぶ事象の確率についても同様にして

$$P(A)=\frac{1}{6}$$

となる。
また すべてがアルファベット順やその逆順ではないように並ぶ事象の確率については 4 つの要素があるので、

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

が得られる。

［注］確率 $P(A)$ は、事象 A から実数値 $(0 \leq P(A) \leq 1)$ への写像とみなせる。

確率変数

確率 $P(A)$ における A は事象であるが、この A が数値で表されていると変数のように扱えて便利である。
そこで確率を、ある数値すなわち変数 x に依存するものと考えるとき、この x を確率変数と称して、事象 A の代わりに用いることができる。このとき確率は $P(x)$ のように記せる。$P(x)$ は、数値 x から実数値 $(0 \leq P(x) \leq 1)$ への写像とみなせる。

［例］

(1) アルファベットの a, b を並べるとき、a が左から 1 番目に来る事象 $\{(ab)\}$ を変数 $x = 1$ で表し、2 番目に来る事象 $\{(ba)\}$ を変数 $x = 2$ で表すとする。このとき次の対応関係が成り立つ。

確率 $P(A)$	事象 A	変数 x	確率 $P(x)$
$P(\ \{(ab)\}\ )$	$\{(ab)\}$	1	$P(1)$
$P(\ \{(ba)\}\ )$	$\{(ba)\}$	2	$P(2)$

そこで全事象は $\{\ (ab)\ \ (ba)\ \}$ であるから、確率 $P(x)$ について

$$P(1) = \frac{1}{2} = 0.5, \qquad P(2) = \frac{1}{2} = 0.5$$

と記せる。
ここで $P(1) + P(2) = 1$ となる。

(2) アルファベットの a, b, c を並べるとき、a が左端から 1 番目に来る事象 $\{(abc)\ (acb)\}$ を変数 $x = 1$ で表し、2 番目に来る事象 $\{(bac)\ (cab)\}$ を変数 $x = 2$ で表し、3 番目に来る事象 $\{(bca)\ (cba)\}$ を変数 $x = 3$ で表すとする。このとき次の対応関係が成り立つ。

確率 $P(A)$	事象 A	変数 x	確率 $P(x)$
$P(\ \{(abc)\ (acb)\}\ )$	$\{(abc)\ (acb)\}$	1	$P(1)$
$P(\ \{(bac)\ (cab)\}\ )$	$\{(bac)\ (cab)\}$	2	$P(2)$
$P(\ \{(bca)\ (cba)\}\ )$	$\{(bca)\ (cba)\}$	3	$P(3)$

そこで全事象は $\{\ (abc)\ \ (acb)\ \ (bac)\ \ (cab)\ \ (bca)\ \ (cba)\ \}$ であるから、
確率 $P(x)$ について

$$P(1) = \frac{1}{3}, \qquad P(2) = \frac{1}{3}, \qquad P(3) = \frac{1}{3}$$

と記せる。
ここで $P(1) + P(2) + P(3) = 1$ となる。

(3) アルファベットの a, b, c を並べるとき、すべてがアルファベット順に並ぶ事象 $\{(abc)\}$ を変数 $x = 1$ で表し、すべてがアルファベットの逆順に並ぶ事象 $\{(cba)\}$ を変数 $x = -1$ で表し、それら以外の並び方の事象 $\{\ (cab)\ \ (bca)\ \ (acb)\ \ (bac)\ \}$ を確率変数 $x = 0$ で表すとする。
このとき次の対応関係が成り立つ。

確率 $P(A)$	事象 A	変数 x	確率 $P(x)$
$P(\ \{(cba)\}\ )$	$\{(cba)\}$	-1	$P(-1)$
$P(\ \{(cab)\ (bca)\ (acb)\ (bac)\}\ )$	$\{(cab)\ (bca)\ (acb)\ (bac)\}$	0	$P(0)$
$P(\ \{(abc)\}\ )$	$\{(abc)\}$	1	$P(1)$

そこで全事象は $\{\ (abc)\ \ (cab)\ \ (bca)\ \ (acb)\ \ (bac)\ \ (cba)\ \}$ であるから、
確率 $P(x)$ について

$$P(-1) = \frac{1}{6}, \qquad P(0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \qquad P(1) = \frac{1}{6}$$

と記せる。
ここで $P(-1) + P(0) + P(1) = 1$ となる。

確率分布

確率分布とは、確率変数 x と確率 $P(x)$ の依存関係を表現したものである。
換言すれば、確率変数 x の変化に対して、確率 $P(x)$ がどのように変化するかを示したものが確率分布となる。

［例］

(1) アルファベットの a, b を並べるとき、a が左端から 1 番目に来る事象 $\{(ab)\}$ を確率変数 $x = 1$ で表し、2 番目に来る事象 $\{(ba)\}$ を確率変数 $x = 2$ で表わすときの確率分布を次の表に示す。

確率変数 x	確率 $P(x)$
1	$P(1) = \frac{1}{2} = 0.5$
2	$P(2) = \frac{1}{2} = 0.5$

ただし　$P(1) + P(2) = 1$

この例では、確率変数 x が変化しても確率 $P(x)$ は一定値 0.5 をとるような確率分布となっている。

(2) アルファベットの a, b, c を並べるとき、a が左端から 1 番目に来る事象 $\{(abc)\ (acb)\}$ を確率変数 $x = 1$ で表し、2 番目に来る事象 $\{(bac)\ (cab)\}$ を確率変数 $x = 2$ で表し、3 番目に来る事象 $\{(bca)\ (cba)\}$ を確率変数 $x = 3$ で表わすときの確率分布を次の表に示す。

確率変数 x	確率 $P(x)$
1	$P(1) = \frac{1}{3}$
2	$P(2) = \frac{1}{3}$
3	$P(3) = \frac{1}{3}$

ただし　$P(1) + P(2) + P(3) = 1$

この例では、確率変数 x が変化しても確率 $P(x)$ は一定値 $\frac{1}{3}$ をとるような確率分布となっている。

(3) アルファベットの a, b, c を並べるとき、すべてがアルファベット順に並ぶ事象 $\{(abc)\}$ を確率変数 $x = 1$ で表し、すべてがアルファベットの逆順に並ぶ事象 $\{(cba)\}$ を確率変数 $x = -1$ で表し、それら以外の並び方の事象 $\{\ (cab)\ \ (bca)\ \ (acb)\ \ (bac)\ \}$ を確率変数 $x = 0$ で表すときの確率分布を次の表に示す。

確率変数 x	確率 $P(x)$
-1	$P(-1) = \frac{1}{6}$
0	$P(0) = \frac{4}{6}$
1	$P(1) = \frac{1}{6}$

ただし　$P(-1) + P(0) + P(1) = 1$

この例では、確率変数 $x = \pm 1$ のとき、$P(x)$ は $\frac{1}{6}$ であるが、確率変数 $x = 0$ のときは $P(x)$ が $\frac{4}{6}$ をとるような確率分布となっている。
この確率分布より、アルファベット順またはその逆順となるような事象は、そうでない並び方の事象に比べて確率は小さいことを示している。

［注］確率変数 x を横軸にとり、確率 $P(x)$ を縦軸にとると、確率分布をグラフに表現することが出来る。

二項分布

ある独立な試行を n 回行うとき、その結果として「成功」の起こる確率を p とすると失敗の起こる確率は $1 - p$ となる。
そこで確率変数 x を n 回の試行中の「成功」の回数とすると、x は「0 から n」までの整数値をとることになる。
このときの x を二項確率変数と呼び、この二項確率変数の確率分布を二項分布という。
二項分布 $p(x)$ は次式によって与えられる。

$$p(x) = \frac{n!}{x!\ (n-x)!}\ p^x (1-p)^{n-x} \qquad (\text{ただし}\ \ x = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

［例題］

設問が 10 題ある試験を行うとする。各問はそれぞれ 5 個の選択肢があって、その中から一つの正解を選ぶ方式の問題である。この試験において、全く無作為に答えるとき、60 点以上をとる確率を求めよ。
ただし一題につき 10 点とし、計 100 点満点とする。

（解）

無作為に解答するので、5 個の選択肢をもつ各問において正解を得る確率は

$p = \dfrac{1}{5}$ となる。また 10 題ある試験なので、$n = 10$ である。したがって

$$p(x) = \frac{10!}{x!\,(10-x)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{10-x} \qquad (\text{ただし}\ \ x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

ここで 1 題につき 10 点として合計 100 点とするときの 60 点以上となる確率を求める。
正解となる問題の個数が 6 題以上となる確率は二項分布の式において、
$x \geq 6$ の合計を計算すればよいことになる。
すなわち 10 題中の 6 題が正解の確率 $p(6)$
10 題中の 7 題が正解の確率 $p(7)$
10 題中の 8 題が正解の確率 $p(8)$
10 題中の 9 題が正解の確率 $p(9)$
10 題中の 10 題が正解の確率 $p(10)$
これらの確率を加えると
$p(6) + p(7) + p(8) + p(9) + p(10)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{10!}{6!\,(10-6)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{6}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{10-6} + \frac{10!}{7!\,(10-7)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{7}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{10-7} + \frac{10!}{8!\,(10-8)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{8}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{10-8} \\
&\quad + \frac{10!}{9!\,(10-9)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{9}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{10-9} + \frac{10!}{10!\,(10-10)!}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{10-10} \\
&= 0.0586
\end{aligned}$$

連続確率変数

前述の各例においては、確率変数 x は整数のような離散的な値をもつ場合を考えたが、一般に確率変数 x は実数で与えられる連続的な値をとり得る。このとき確率 $P(x)$ は、独立変数 x の関数 $f(x)$ のようにみなせる。したがって確率分布は関数 $f(x)$ で表現できることになる。ただし この確率分布を表す関数 $f(x)$ は、次の条件を満たす必要がある。

(1) $f(x)$ は負の値にはなり得ない。

$$f(x) \geq 0, \qquad (-\infty < x < \infty)$$

(2) $f(x)$ と x 軸で囲まれる領域の面積は、必ず 1 でなければならない。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

条件 (1) は、確率が負になり得ないことから要請される。条件 (2) は、確率の値が 1 を上限とすることに由来する。確率分布関数 $f(x)$ は、確率そのものを表しているわけではない。連続確率変数 x の場合には、それの任意の一点の値の確率そのものについては零となってしまう。確率そのものを求めるためには、関数 $f(x)$ を x について、着目している領域にわたって積分することが必要である。全領域にわたって積分すれば、もちろん確率の値は 1 となる。

［例］

線状材質の長さ方向の各点 x において破断する確率分布 $f(x)$ を考えるとき、この x は連続確率変数となる。
このとき線状材質全体の長さにわたって $f(x)$ を積分すれば、確率の値は 1 である。

正規分布

確率変数 x の確率分布が正規曲線で与えられるとき、このような確率分布のことを正規分布または Gauss(ガウス) 分布という。ここで正規曲線は、次式のような関数によって与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

ただし π は円周率，e は自然対数の底，μ は平均値，σ は標準偏差である。
正規曲線は次のような性質をもった釣鐘を伏せたような形状のグラフである。

(1) $x = \mu$ に関して左右対称である。

(2) $x = \mu$ で最大値 $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ をとり、その両側で単調に減少する。

(3) $x = \mu \pm \sigma$ を変曲点としてもつ。

正規関数において、平均値 μ や標準偏差 σ は重要なパラメータである。
一般に上記の正規関数 $f(x)$ を $N(\mu, \sigma^2)$ のように記す。
この正規関数において、平均値 $\mu = 0$ かつ 標準偏差 $\sigma = 1$ とおいた場合、すなわち $N(0,1)$ とするとき

$$N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right]$$

と記せる。この関数 $N(0,1)$ の与える分布は標準正規分布と呼ばれる。標準正規分布の場合は原点において最大値 $1/\sqrt{2\pi}$ をとる。自然現象並びに社会現象についての莫大な数の統計データの分布状況を調べると、近似的に正規曲線で表すことが出来る事例がしばしば見受けられる。
例えばヒト集団の身長や体重の統計データについて莫大な数を集めていくと、そのデータの分布状況は正規分布に近づいていく。
確率分布の概念は、確率統計の分野において極めて重要な役割を担っている。