ベクトル　vector

1　ベクトル vector

ベクトルの直交座標表示
ベクトル $\mathbf{A}$ の直交座標軸 x, y, z 方向のそれぞれの成分を A_x, A_y, A_z とすると

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z$$

のように記せる。
ただし $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は x, y, z 各座標軸の基本ベクトルである。
このときベクトルの大きさ $|\mathbf{A}|$ は次式によって定義される。

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

基本ベクトル
基本ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は次のような演算規則に従う。

基本ベクトルの大きさ　$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$

内積
$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$　　　ただし「$\cdot$」は内積の記号
$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$
$\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$

外積
$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$　　　ただし「$\times$」は外積の記号
$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

ベクトルの和と差
二つのベクトルを $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ とするとき、それらベクトルの和と差は次式によって与えられる。

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{i}(A_x + B_x) + \mathbf{j}(A_y + B_y) + \mathbf{k}(A_z + B_z)$$
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{i}(A_x - B_x) + \mathbf{j}(A_y - B_y) + \mathbf{k}(A_z - B_z)$$

ただし　$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z$

ベクトルの内積と外積
二つのベクトルを $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ とするとき、それらベクトルの内積と外積は次式によって与えられる。

内積
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z) \cdot (\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z)$$
$$= \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}A_xB_x + \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}A_xB_y + \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}A_xB_z + \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}A_yB_x + \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}A_yB_y + \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}A_yB_z + \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}A_zB_x + \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}A_zB_y + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}A_zB_z$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

すなわち　$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$　　　（ベクトルの内積は交換則が成り立つ。）
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$　　　（ベクトルの大きさ $|\mathbf{A}|$ の二乗を与える。）

外積

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z)\times(\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z)\\
&= \mathbf{i}\times\mathbf{i}A_xB_x + \mathbf{i}\times\mathbf{j}A_xB_y + \mathbf{i}\times\mathbf{k}A_xB_z + \mathbf{j}\times\mathbf{i}A_yB_x + \mathbf{j}\times\mathbf{j}A_yB_y + \mathbf{j}\times\mathbf{k}A_yB_z + \mathbf{k}\times\mathbf{i}A_zB_x\\
&\quad + \mathbf{k}\times\mathbf{j}A_zB_y + \mathbf{k}\times\mathbf{k}A_zB_z\\
&= \mathbf{i}\times\mathbf{j}A_xB_y + \mathbf{i}\times\mathbf{k}A_xB_z + \mathbf{j}\times\mathbf{i}A_yB_x + \mathbf{j}\times\mathbf{k}A_yB_z + \mathbf{k}\times\mathbf{i}A_zB_x + \mathbf{k}\times\mathbf{j}A_zB_y\\
&= \mathbf{k}A_xB_y - \mathbf{j}A_xB_z - \mathbf{k}A_yB_x + \mathbf{i}A_yB_z + \mathbf{j}A_zB_x - \mathbf{i}A_zB_y\\
&= \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x)
\end{aligned}
$$

すなわち　$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$

$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$　（ベクトルの外積は交換則が成り立たない。）

$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = \mathbf{B}\times\mathbf{B} = 0$　（同一のベクトルの外積は零となる。）

ベクトルの幾何学的表示

ベクトル $\mathbf{A}$ は有向線分（矢印）で表示することも出来る。
このときベクトル $\mathbf{A}$ の大きさ $|\mathbf{A}|$ は、有向線分の長さ（矢印の長さ）となる。
負のベクトル $-\mathbf{A}$ については、逆向き有向線分（逆向きの矢印）で表される。
ベクトルの和 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ は、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を二辺とする平行四辺形の対角線を長さとする有向線分となる。
ベクトルの内積は、$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$ で与えられる。ただし θ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角である。
ベクトルの外積は、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を二辺とする平行四辺形の面積 $AB\sin\theta$ を長さとするベクトルであって、
方向はその面に垂直で右ねじの進む向きで定義される。その外積の大きさは、$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB\sin\theta$ である。

三つのベクトルの積

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

ベクトルの微分

ベクトル $\mathbf{A}$ や $\mathbf{B}$ がスカラーの変数 t の関数になっているとき、すなわち $\mathbf{A}(t)$ や $\mathbf{B}(t)$ のとき、次式のような
微分演算が定義される。

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j}\frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k}\frac{dA_z}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\pm\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

ベクトルの積分

ベクトル $\mathbf{A}$ や $\mathbf{B}$ がスカラーの変数 t の関数になっているとき、すなわち $\mathbf{A}(t)$ や $\mathbf{B}(t)$ のとき、次式のような
積分演算が定義される。

$$\int \mathbf{A}\,dt = \mathbf{i}\int A_x\,dt + \mathbf{j}\int A_y\,dt + \mathbf{k}\int A_z\,dt$$

$$\int (\mathbf{A}\pm\mathbf{B})\,dt = \int \mathbf{A}\,dt \pm \int \mathbf{B}\,dt$$

ベクトルの応用例

ベクトルの応用例を次に記す。

位置ベクトル　$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$

変位ベクトル　$d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$

速度　$\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$

$$= \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z = \mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz}{dt} \qquad (\text{ただし } t \text{ は時間})$$

加速度　$\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$

$$= \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z = \mathbf{i}\frac{dv_x}{dt} + \mathbf{j}\frac{dv_y}{dt} + \mathbf{k}\frac{dv_z}{dt} = \mathbf{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{k}\frac{d^2z}{dt^2}$$

運動量　$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

$$= \mathbf{i}p_x + \mathbf{j}p_y + \mathbf{k}p_z = \mathbf{i}mv_x + \mathbf{j}mv_y + \mathbf{k}mv_z \qquad (\text{ただし } m \text{ は質量})$$

力　$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

$$= \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z = \mathbf{i}ma_x + \mathbf{j}ma_y + \mathbf{k}ma_z$$

仕事　$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$$= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

運動エネルギー　$K = \dfrac{1}{2m}\mathbf{p}^2 = \dfrac{1}{2}m\mathbf{v}^2$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

力のモーメント　$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$$= \mathbf{i}\left(yF_z - zF_y\right) + \mathbf{j}\left(zF_x - xF_z\right) + \mathbf{k}\left(xF_y - yF_x\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

角運動量　$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

$$= \mathbf{i}\left(yp_z - zp_y\right) + \mathbf{j}\left(zp_x - xp_z\right) + \mathbf{k}\left(xp_y - yp_x\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

2　ベクトル場 vector field

ベクトル場

ベクトル $\mathbf{A}$ が空間座標 (x,y,z) の関数になっているとき、すなわち $\mathbf{A}(x,y,z)$ のときベクトル場と呼ばれ、

$$\mathbf{A}(x,y,z)=\mathbf{i}A_x(x,y,z)+\mathbf{j}A_y(x,y,z)+\mathbf{k}A_z(x,y,z)$$

のように記せる。
ただし $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ は x,y,z 各座標軸の基本ベクトルである。

［注］スカラー ϕ が空間座標 (x,y,z) の関数になっているとき、すなわち $\phi(x,y,z)$ のときはスカラー場と呼ばれる。

勾配

スカラー場 $\phi(x,y,z)$ とするとき、各点における勾配を表すベクトル $\mathrm{grad}\,\phi$ が次式のように定義される。

$$\mathrm{grad}\,\phi=\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\qquad (\mathrm{grad}\ \text{の呼称 ： グラジエント})$$

ベクトル微分演算子　$\nabla=\mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$　とするとき

$$\mathrm{grad}\,\phi=\nabla\phi\qquad (\nabla\ \text{の呼称 ： ナブラ})$$

のように記せる。

発散

ベクトル場 $A(x,y,z)$ とするとき、発散を表すスカラー $\mathrm{div}\,\mathbf{A}$ が次式のように定義される。

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\qquad (\mathrm{div}\ \text{の呼称 ： ダイバージェンス})$$

$\nabla=\mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$　を用いると　$\mathrm{div}\,\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathbf{A}$

回転

ベクトル場 $A(x,y,z)$ とするとき、回転を表すベクトル $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ が次式のように定義される。

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\qquad (\mathrm{rot}\ \text{の呼称 ： ローテーション})$$

$\nabla=\mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$　を用いると　$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$

勾配の発散

スカラー場 $\phi(x,y,z)$ とするとき、各点における勾配の発散を表すスカラー $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi$ は次式のように記せる。

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$\nabla=\mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$　を用いると　$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi=\nabla\cdot\nabla\phi\ =\ \nabla^2\phi$

［注］ ∇^2 を Δ で記すこともある。（呼称はラプラシアン）

回転の回転

ベクトル場 $A(x,y,z)$ とするとき、回転の回転を表すベクトル $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ は次式のように記せる。

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}=\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}\ =\ -\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\mathbf{A}+\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}\ =\ -\nabla^2\mathbf{A}+\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}\ =\ -\nabla^2\mathbf{A}+\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right)$$

勾配の回転

スカラー場 $\phi(x,y,z)$ とするとき、勾配の回転を表すベクトル $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi$ は常に零ベクトル $\mathbf{0}$ となる。

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = \nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0} \qquad (\text{ただし}\ \ \mathbf{0} = \mathbf{i}\,0 + \mathbf{j}\,0 + \mathbf{k}\,0)$$

回転の発散

ベクトル場 $\mathbf{A}(x,y,z)$ とするとき、回転の発散を表すスカラー $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ は常に零となる。

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

公式

$$\mathrm{div}(\phi\mathbf{A}) = (\mathrm{grad}\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi\,(\mathrm{div}\mathbf{A})$$
$$\mathrm{rot}(\phi\mathbf{A}) = (\mathrm{grad}\phi) \times \mathbf{A} + \phi\,(\mathrm{rot}\mathbf{A})$$

スカラー場ならびにベクトル場の応用例

重力のポテンシャルエネルギー $U(x,y,z)$ とするとき、重力場 $\mathbf{F}(x,y,z)$ は次式によって与えられる。

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}\,U$$

電荷密度 $\rho(x,y,z)$ とし、電流密度 $\mathbf{j}(x,y,z)$ とするとき、電荷の保存法則は次式のように記せる。

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad (\text{ただし}\ t\ \text{は時間})$$

電場 $\mathbf{E}(x,y,z)$ とし、電荷密度 $\rho(x,y,z)$ とするとき、Gauss(ガウス) の法則は次式のように記せる。

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho$$

電場 $\mathbf{E}(x,y,z)$ とし、磁束密度 $\mathbf{B}(x,y,z)$ とするとき、Faraday(ファラデー) の法則は次式のように記せる。

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0$$